# CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO 2

Fabrício Moraes de Almeida
(Organizador)

Atena Editora
Ano 2023

# CONSTRUÇÃO **E DIFUSÃO** DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO 2

**Fabrício Moraes de Almeida**
(Organizador)

Atena Editora
Ano 2023

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

# Construção e difusão do conhecimento matemático 2

**Diagramação:** Camila Alves de Cremo
**Correção:** Yaiddy Paola Martinez
**Indexação:** Amanda Kelly da Costa Veiga
**Revisão:** Os autores
**Organizador:** Fabrício Moraes de Almeida

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**

C758 Construção e difusão do conhecimento matemático 2 / Organizador Fabrício Moraes de Almeida. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2023.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-1817-7
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.177230410

1. Matemática. I. Almeida, Fabrício Moraes de (Organizador). II. Título.

CDD 510

**Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166**

**Atena Editora**
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

## DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

## DECLARAÇÃO DA EDITORA

# APRESENTAÇÃO

A construção e difusão do conhecimento matemático são variáveis dos processos essenciais para o desenvolvimento da matemática e da ciência. De forma geral, no século XXI, essas variáveis são influenciadas por avanços de ciências exatas, das engenharias, das tecnologias disruptivas e vice-versa.

Inicialmente, a construção do conhecimento matemático é um processo abstrato que relaciona investigação, a descoberta e as definições dos conceitos, teoremas e resultados matemáticos. No século XXI, esse processo está sendo potencializado pelo desenvolvimento otimizado de sistemas computacionais e softwares matemáticos. Esses mecanismos permitem aos matemáticos realizar cálculos complexos e simulações. E o uso de redes sociais e plataformas online permitem aos matemáticos compartilhar e colaborar em projetos globais.

De fato, a internet naturalmente induz os matemáticos para publicar seus trabalhos científicos em revistas e periódicos online, disponibilizar recursos educacionais e os materiais de divulgação técnico-científica. Esses fatores têm implicações no aumento do acesso ao conhecimento matemático e da educação matemática. E a mídia digital pode ser utilizada para divulgar a matemática de forma acessível e atrativa, para o público em geral. Por exemplo, os vídeos, as animações, robótica educacional com programação ou jogos matemáticos devem ser utilizados para ensinar matemática de forma lúdica e interativa, para despertar o interesse e o aprendizado.

Portanto, a construção e difusão do conhecimento matemático são processos fundamentais para o avanço da matemática, do ensino de matemática e da ciência. Dessa forma, o livro apresenta uma fundamentação teórico-prática nos resultados obtidos pelos diversos autores e coautores na estrutura de cada capítulo com conhecimento científico e com a didática adequada. Além disso, Atena Editora oferece uma divulgação científica com qualidade e excelência, essencial para conquistar o destaque entre as melhores editoras do Brasil.

Fabrício Moraes de Almeida

SUMÁRIO

SUMÁRIO

# RESOLVENTE DEL OPERADOR DIFERENCIAL EN EL ESPACIO $L^2([-\pi, \pi])$

*Data de aceite: 02/10/2023*

**Yolanda Silvia Santiago Ayala**
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Fac. de Ciencias Matemáticas
https://orcid.org/0000-0003-2516-0871

**RESUMEN**: En este trabajo, estudiamos al operador diferencial en el subespacio distribucional periódico $L^2([-\pi, \pi])$. Determinamos el resolvente de este operador y su caracterización mediante la convolución. Esta teoría nos permite resolver problemas distribucionales. Finalmente, damos algunas aplicaciones y comentarios.
**PALABRAS CLAVE:** Operador diferencial, Resolvente de un operador, espacio distribucional periódico, Transformada de Fourier, existencia de solución.

## RESOLVENT OF DIFFERENTIAL OPERATOR ON $L^2([-\Pi, \Pi])$ SPACE

**ABSTRACT**: In this work, we study the differential operator on $L^2([-\pi, \pi])$ periodic distributional space. We determine the resolvent of this operator and its characterization through convolution. This theory allows us to solve distributional problems. Finally, we give some applications and comments.
**KEYWORDS:** Differential operator, Resolvent of operator, periodic distributional space, Fourier transform, existence of solution.

## 1 I INTRODUCCIÓN

En este artículo estudiaremos al operador diferencial en el espacio de Hilbert $L^2([-\pi, \pi])$. Daremos la forma explícita del resolvente de este operador y su caracterización mediante la convolucion. Además, determinaremos la solución de un problema distribucional.

Este estudio puede ser aplicado a los espacios de Sobolev periódico $H^s_{per}$. Podemos citar algunos trabajos en estos espacios, como [1], [3]-[8]. Como referencia para este estudio citamos a Iorio [1] y [8].

Nuestro artículo está organizado del siguiente modo. En la sección 2, indicamos la metodología usada y citamos las referencias usadas. En la sección 3, colocamos los resultados obtenidos de nuestro estudio. Esta sección la dividimos

en seis subsecciones. Así, en la subsección 3.1 estudiamos al Operador diferenciación $D$ en $L^2([-\pi, \pi])$.

En la subsección 3.2, estudiamos al Operador diferenciación $D^2$ en $L^2([-\pi, \pi])$. En la subsección 3.3, estudiamos al Operador diferencial $H_o$ en $L^2([-\pi, \pi])$. En la subsección 3.4, estudiamos al Operador $F_z(H_o)$ en $L^2([-\pi, \pi])$ y probamos que es acotada y que representa al resolvente en $z$ de $H_o$. En la subsección 3.5, obtenemos otra caracterización del resolvente usando la convolución. En la subsección 3.6, damos una aplicación donde evidenciamos la forma explícita de la solución de un problema distribucional.

Finalmente, en la sección 4 damos las conclusiones y observaciones de este estudio.

## 2 | METODOLOGÍA

Rápidamente introduciremos algunas definiciones que serán usadas en este artículo.

**Definición 2.1** *Sea*

$$P: \; = \; C^{\infty}_{per}([-\pi, \pi])\,,$$

*el espacio de las funciones $f : IR \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciable y periódica con periodo* $2\pi$.

Así, se prueba que $P$ es un espacio métrico completo.

También,

$$\begin{aligned} P' \;&:=\; \Big\{T : P \longrightarrow \mathbb{C} \text{ lineal tal que } \exists \psi_n \in P \text{ y} \\ &\qquad < T, \varphi >= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(x)\varphi(x)\,dx\,,\; \forall \varphi \in P\Big\} \\ &= \; (P)'\,. \end{aligned}$$

Esto es, $P'$ es el dual topológico de $P$ . Así, $P'$ es llamado el espacio de las Distribuciones Periódicas.

**Definición 2.2** *Denotamos por* $S(Z)$ *al espacio de las sucesiones Rápidamente Decrecientes (R.D.), definido por*

$$S(\mathbb{Z}) := \left\{ \alpha = (\alpha_k)_{k\in Z}\,,\; \alpha_k \in \mathbb{C} \,/\, \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k| < \infty \;\; y \;\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k||k|^n < \infty \;,\; \forall n \geq 1 \right\}$$

*y* $S'(Z)$ *es el espacio de las sucesiones de Crecimiento Lento (C.L.), definido por* $S'(Z) := \alpha = (\alpha_k)_{k\in Z}\,,\, \alpha_k \in \mathbb{C} \,/\, \exists\, C > 0\,,\, \exists\, N \in IN$ *con* $|\alpha_k| \leq C|k|^N\,,\, \forall k \neq 0\}$ .

Para ver propiedades de $P$ , $P'$, $S(Z)$ y $S'(Z)$ citamos [1] y [9]; y para $L^2([-\pi, \pi])$ y propiedades citamos [10].

Ahora, enunciaremos un importante resultado que será usado posteriormente.

**Teorema 2.1 (Hellinger-Toeplitz)** *Si $T$ es un operador lineal no acotado, simtrico y densamente definido (i.e $\overline{Dom(T)} = H$) en un espacio $H$ de Hilbert, entonces no admite*

*extensión lineal simétrica a H.*

**Prueba.**Citamos Kreyszig [2].

## 3 | PRINCIPALES RESULTADOS

### 3.1 El operador $D$ de diferenciación en $L^2([-\pi, \pi])$

**Proposición 3.1 (Operador Diferenciación $D$)** *El operador*

$$\begin{array}{rcl} D : P \subset L^2([-\pi,\pi]) & \longrightarrow & L^2([-\pi,\pi]) \\ \varphi & \rightarrow & -i\varphi' \end{array}$$

*es $\mathbb{C}$ lineal, densamente definido, simétrico y no acotado.*

**Prueba.-** Fácilmente se prueba que es lineal. Sean $f, g \in P$, usando la identidad de Parseval y que $k \in IR$, $(-if')^\wedge(k) = kf^\wedge(k)$ y $(-ig')^\wedge(k) = kg^\wedge(k)$, $\forall k \in Z \subset IR$, se tiene que

$$\begin{aligned} (Df, g) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(z)} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\overline{k\widehat{g}(z)} \\ &= (f, Dg), \end{aligned}$$

esto es, $D$ es simétrico.

En efecto, $D$ es densamente definido pues $\overline{P}^{\|\cdot\|2} = L^2([-\pi, \pi])$.

Ahora, probaremos que $D$ no es acotado. Para esto introducimos una familia $(\varphi_k)$ de funciones en $P$, donde $\varphi_k(x) := \frac{e^{ikx}}{k}$, $\forall k \in Z - \{0\}$. Se observa que $\|\varphi_k\|_2 \frac{\sqrt{2\pi}}{|k|}$.

Además, $D\varphi_k = e^{ik(\cdot)}$ y $\|D\varphi_k\|_2 = \sqrt{2}\pi$.

Podemos observar que $\frac{\|D\varphi_k\|_2}{\|\varphi_k\|_2} = |k|$, $\forall k \in Z - \{0\}$, no es acotada. Luego $D$ no es acotado.

### 3.2 El Operador $D^2$ de Diferenciación en $L^2([-\pi, \pi])$

**Proposición 3.2 (Operador Diferenciación $D^2$)** *El operador*

$$\begin{array}{c} D^2 : P \subset L^2([-\pi, \pi]) \rightarrow L^2([-\pi, \pi]) \\ \varphi \rightarrow -\varphi'' \end{array}$$

*es $\mathbb{C}$ -lineal, densamente definido, simétrico y no acotado.*

**Prueba.** En efecto, sea $c \in \mathbb{C}$ y $\varphi$, $\psi \in P$, tenemos

$$\begin{aligned} D^2(\varphi + c\psi) &= -(\varphi + c\psi)'' \\ &= -\varphi'' - c\psi'' \\ &= D^2\varphi - cD^2\psi\,, \end{aligned}$$

esto es, $D^2$ es $\mathbb{C}$ -lineal.

Ahora, probaremos que $D^2$ es simérrico. Sean $\varphi$, $\psi \in P$ , entonces

$$\begin{aligned}(D^2\varphi, \psi) &= (-\varphi'', \psi)\\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} \varphi''(x)\overline{\psi}(x)\, dx\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(x)\overline{\psi}'(x)\, dx - \varphi'(x)\overline{\psi}(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(x)\overline{\psi}'(x)\, dx\\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\overline{\psi}''(x)\, dx + \varphi(x)\overline{\psi}'(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}\\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\overline{\psi}''(x)\, dx\\ &= (\varphi, D^2\psi)\,,\end{aligned}$$

desde que $\psi$, $\varphi$ y sus derivadas son periódicas de periodo $2\pi$.

Ahora, probaremos que el Operador $D^2$ no es acotado. En efecto, para esto introduciremos una sucesión de funciones en $P$ . Esto es, para cada $k \in I\!N$ , definimos

$$\psi_k(x) := \frac{e^{ikx}}{k^2}\,.$$

Se observa que $\psi_k \in P$ y que $\|\psi_k\|_2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{k^2}$. Además, $\psi''_\kappa(x) = -e^{ikx}$ y $\|D^2\psi_k\|_2 = \|\psi_k''\|_2 = \sqrt{2}\pi$.

Podemos observar que $\frac{\|D^2\psi_k\|_2}{\|\psi_k\|_2} = k^2$, $\forall k \in I\!N$ no es acotada. Así, el operador $D^2$ no es acotado.

Como $Dom\ (D^2) = P$ y $\overline{P}^{\|\cdot\|2} = L^2([-\pi, \pi])$, entonces el operador $D^2$ es densamente definido.

**Proposición 3.3** *El operador diferenciacion no acotado $D^2$ no admite extensión a la cerradura de su dominio: $\overline{P}^{\|\cdot\|2} = L^2([-\pi, \pi])$.*

**Prueba.** En efecto, si admitiera extensión a la cerradura de su dominio sería

$$\tilde{D}^2 : \overline{P} = L^2([-\pi, \pi]) \to L^2([-\pi, \pi])$$
$$g \to -g'' \text{ derivada distribucional}$$

lo cual no es posible, pues $\exists f \in L^2([-\pi, \pi])$ tal que $f'' \notin L^2([-\pi, \pi])$. En efecto, definiendo

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & -\pi < x \leq \pi \\ \text{con } f(x+2\pi) = f(x), & \forall x \in I\!R \end{cases}$$

tenemos que: $f \in C_{per}([-\pi, \pi]) \subset L^2([-\pi, \pi])$ y $f'' = 2\delta - 2\delta_\pi \notin L^2([-\pi, \pi])$ pues $\hat{f''} \notin l^2(Z)$. Para verificar esto, basta calcular:

$$\widehat{f''}(k) = \begin{cases} 0, & \text{si } |k| \text{ es par o cero} \\ \frac{2}{\pi}, & \text{si } |k| \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f''}(k)|^2 = 2 \sum_{k=impar} |\widehat{f''}(k)|^2 = +\infty\,.$$

En consecuencia tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 3.4** *Si un operador lineal no es acotado, puede suceder que no admita extensión a la cerradura de su dominio.*

**Prueba.** Esto sigue de la proposición 3.3.

## 3.3 El operador $H_o$ en $L^2([-\pi, \pi])$

**Proposición 3.5 (Operador Diferenciación $H_o$)** *El Operador*

$$H_o : Dom\,(H_o) \subset L^2([-\pi, \pi]) \to L^2([-\pi, \pi])$$
$$f \to -f''\ \text{derivada distribucional}$$

*con* $Dom(H_o) := \{f \in L^2([-\pi, \pi])$ *tal que* $-f'' \in L^2([-\pi, \pi])\}$ *es lineal, simétrico, densamente definido y no acotado. Además,* $H_o$ *no admite extensión lineal simétrica a* $L^2([-\pi, \pi])$.

**Prueba.** Sean $f, g \in Dom(H_o)$ y $c \in \mathbb{C}$ entonces $f$ y $g$ son infinitamente diferenciables en el sentido distribucional, con $f'', g'' \in L^2([-\pi, \pi])$, luego, $(cf + g)'' = cf'' + g'' \in L^2([-\pi, \pi])$, esto es $H_o(cf + g) = cH_of + H_og$.

Se cumple $P \subset Dom\,(H_o)$, luego

$$L^2([-\pi, \pi]) = \overline{P}^{|||\cdot|||_2} \subset \overline{Dom\,(H_o)}^{|||\cdot|||_2} \subset L^2([-\pi, \pi])\,,$$

de donde obtenemos que $\overline{Dom\,(H_o)}^{|||\cdot|||_2} = L^2([-\pi, \pi])$.

Ahora, probaremos que el Operador $H_o$ no es acotado. En efecto, para esto introduciremos la sucesión $(\psi_k)$ de funciones en $P$, donde $\psi_k(x) = \frac{e^{ikx}}{k^2}$. Se observa que $\|\psi_k\|_2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{k^2}$. Además, $\psi''k = -e^{ikx}$ y $|||H_o\psi_k|||_2 = \|\psi k''\|_2 = \sqrt{2}\pi$.

Podemos observar que $\frac{\|H_o\psi_k\|_2}{\|\psi_k\|_2} = k^2$, $\forall k \in IN$ no es acotada. Luego, el operador $H_o$ no es acotado.

Sean $f, g \in Dom(H_o)$, probaremos que $(-f'', g) = (f, -g'')$. En efecto, usando la Identidad de Parseval, las igualdades: $\hat{f''}(k) = -k^2\hat{f}\,(k)$ y $\hat{g''}\,(k) = -k^2\hat{g}\,(k)$, $\forall k \in Z$, tenemos

$$\begin{aligned}
(-f'', g) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-f'')^\wedge(k)\overline{\widehat{g}(k)} \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^2\widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\overline{k^2\widehat{g}(k)} \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{-g''}(k)} \\
&= (f, -g'')\,,
\end{aligned}$$

esto es, $(H_o f, g) = (f, H_o g)$ para todo $f, g \in Dom\,(H_o)$, con lo que hemos probado que $H_o$ es simétrico.

El además, sale de usar el Teorema 2.1.

**Observación 3.1** *El operador $H_o$ es una extensión de $D^2$.*

A seguir, daremos algunas propiedades importantes de $H_o$.

**Proposición 3.6** *Se satisfacen los siguientes enunciados:*

*1. Para $k \in Z$, $\phi_k$ es una autofunción de $H_o$ correspondiente al autovalor $k^2$, desde que $H_o\phi_k = D^2\phi_k = -\phi k'' = k^2\phi_k$ con $\phi_k(x) := e^{ikx}$.*

*2. $H_o(\cdot) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^2 P_k(\cdot)$, donde para $f \in Dom(H_o)$ se tiene para cada $k \in Z$ $P_k(f) = \frac{1}{2\pi}(f, \phi_k)\phi_k \in L(\{\phi_k\})$. Recordemos que $P_k$ es el operador proyección ortogonal sobre el subespacio cerrado $L(\{\phi_k\})$. Y observemos que la convergencia de la serie es con la norma $|||\cdot|||_2$.*

**Prueba.**Es inmediato.

**Observación 3.2** *Se verifica que $\{k^2\}_{k\in Z} \subset \sigma_p(H_o)$.*

## 3.4 El operador $F_z(H_o) \in B(L^2([-\pi, \pi]))$

Ahora, a partir de $H_o$ generaremos un operador acotado, y para ello introduciremos una función $F_z$.

**Definición 3.1** *Sea la función $F_z : IN \to \mathbb{C}$ tal que $F_z(x) = \frac{1}{x-z}$ y $k^2 - z \neq 0, \forall k \in Z$, definimos:*

$$\begin{array}{rcl} F_z(H_o) : Dom(F_z(H_o)) \subset L^2([-\pi,\pi]) & \longrightarrow & L^2([-\pi,\pi]) \\ f & \longrightarrow & F_z(H_o)f := \left\{(F_z(k^2)\widehat{f}(k))\right\}^{\vee}, \end{array}$$

$$con\ Dom(F_z(H_o)) := \left\{f \in L^2([-\pi,\pi])\ tal\ que\ \left(F_z(k^2)\widehat{f}(k)\right) \in l^2(\mathbb{Z})\right\}.$$

Así, de la definición de $F_z(H_o)$ tenemos

$$F_z(H_o)f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_z(k^2)\underbrace{\widehat{f}(k)\phi_k}_{P_k(f)=}, \ \forall f \in Dom(F_z(H_o)),$$

donde la convergencia de la serie es con la norma $|||\cdot|||_2$.

Ahora, estudiaremos algunas propiedades de $F_z(H_o)$.

**Proposición 3.7** *La aplicacion $F_z(H_o)$ es $\mathbb{C}$ - lineal.*

**Prueba.** Sean $f, g \in Dom\,(F_z(H_O))$ entonces $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$,$(F_z(k^2)\hat{f}(k)) \in l^2(Z)$ y $(F_z(k^2)\hat{g}(k)) \in l^2(Z)$. Luego, $\{f + cg\} \in L^2([-\pi, \pi])$ y

$$\begin{aligned} \left(F_z(k^2)\{f+cg\}^\wedge(k)\right) &= \left(F_z(k^2)\{\widehat{f}(k) + c\widehat{g}(k)\}\right) \\ &= \left(F_z(k^2)\widehat{f}(k) + cF_z(k^2)\widehat{g}(k)\right) \\ &= \left(F_z(k^2)\widehat{f}(k)\right) + c\left(F(k^2)\widehat{g}(k)\right) \in l^2(\mathbb{Z}). \qquad (3.1) \end{aligned}$$

Tomando la transformada inversa de Fourier a (3.1), tenemos $F_z(H_o)\{f + cg\} = F_z(H_o) f + cF_z(H_o)g$.

**Proposición 3.8** *Sea $z \in ₵$ y $F_z(x) := \frac{1}{x-z}$ tal que $k^2 - z \neq 0$, $\forall k \in Z$, entonces $F_z(H_o) \in B(L^2([-\pi, \pi]))$.*

**Prueba.** Primero notemos que existe $\inf_{k\in\mathbb{Z}} |k^2-z| > 0$ y si denotamos $\delta := \inf_{k\in\mathbb{Z}} |k^2-z|$ tenemos:

$$0 < \delta \leq |k^2 - z|\,, \forall k \in \mathbb{Z}\,.$$

Luego,

$$|F_z(k^2)| = \frac{1}{|k^2 - z|} \leq \frac{1}{\delta}\,, \forall k \in \mathbb{Z}\,. \tag{3.2}$$

Sea $f \in Dom\ F_z(H_o)$, usando (3.2) y la Identidad de Parseval se tiene

$$\begin{aligned}
|||F_z(H_o)f|||_2^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |F_z(k^2)\widehat{f}(k)|^2 \\
&\leq 2\pi\delta^{-2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \\
&= 2\pi\delta^{-2}\|\widehat{f}\|_2^2 \\
&= \delta^{-2}|||f|||_2^2\,.
\end{aligned}$$

Esto es, $|||F_z(H_o)f\,|||_2 \leq \delta^{-1}|||f\,|||_2$, $\forall f \in Dom(F_z(H_o))$. Así, $F_z(H_o)$ es acotada y $\|F_z(H_o)\| \leq \delta^{-1}$.

Nos resta probar que $Dom\,(F_z(H_o)) = L^2([-\pi, \pi])$. Una de las inclusiones es inmediata. Probaremos que si $f \in L^2([-\pi, \pi])$ entonces $(F_z(k^2)\hat{f}\,(k)) \in l^2(Z)$.

En efecto, por hipótesis, aplicando la transformada de Fourier a $f$ tenemos $\hat{f} \in l^2(Z)$, luego usando la acotacion (3.2), tenemos $(F_z(k^2)\hat{f}\,(k)) \in l^2(Z)$.

Finalmente veremos que $F_z(H_o)$ es el inverso del operador $H_o - z$; esto es, $F_z(H_o) = (H_o - z)^{-1}$.

**Proposición 3.9 (Caracterización de $F_z(H_o)$)** *Sea $z \in ₵$ y $F_z(x) = \frac{1}{x-z}$ tal que $k^2 - z \neq 0$, $\forall k \in Z$, entonces $B(L^2([-\pi, \pi]))$ 3 $F_z(H_o) = (H_o - z)^{-1}$, esto es satisface:*

*1. $(H_o-z)F_z(H_o)f = f$, $\forall f \in DomF_z(H_o) = L^2([-\pi, \pi])$ y $F_z(H_o)f \in Dom(H_o)$.*

*2. $F_z(H_o)(H_o - z)f = f$, $\forall f \in Dom(H_o)$.*

**Prueba.** Primero veremos que la función $\mathbb{Z} \ni k \to \frac{k^2}{k^2-z}$ es acotada.

$$\left|\frac{k^2}{k^2 - z}\right| = \left|1 + \frac{z}{k^2 - z}\right|$$

$$\leq \; 1 + |z| \left| \frac{1}{k^2 - z} \right|$$

$$\leq \; \underbrace{1 + |z|\delta^{-1}}_{\xi(z):=}, \; \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{3.3}$$

donde $0 < \delta := \inf_{k\in Z} |k^2 - z|$.

Sea $f \in L^2([-\pi, \pi])$, usando (3.3) obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^4 |\{F_z(H_o)f\}^\wedge(k)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^4 |F_z(k^2)\widehat{f}(k)|^2 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^4 \frac{|\widehat{f}(k)|^2}{|k^2 - z|^2} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{k^2}{k^2 - z} \right|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \\
&\leq \underbrace{\left( \sup_{k\in\mathbb{Z}} \left| \frac{k^2}{k^2 - z} \right| \right)^2}_{\leq \xi(z)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < \infty .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $F_z(H_o)f \in Dom\,(H_o)$ y

$$\begin{aligned}
(H_o - z)F_z(H_o)f &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k^2 - z)\{F_z(H_o)f\}^\wedge(k)\phi_k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k^2 - z)\frac{\widehat{f}(k)}{k^2 - z}\phi_k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\phi_k \\
&= f .
\end{aligned}$$

Ahora, sea $g \in Dom\,(H_o)$, entonces

$$\begin{aligned}
F_z(H_o)(H_o - z)g &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_z(k^2)(k^2 - z)\widehat{g}(k)\phi_k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(k)\phi_k \\
&= g .
\end{aligned}$$

**Definición 3.2**

$$A := \{z \in \mathbb{C},\, k^2 - z \neq 0 \,,\, \forall k \in Z\}$$

**Observacion 3.3** *Si $z \in A$ entonces el operador $H_o - zI : Dom\,(H_o) \rightarrow L^2([-\pi, \pi])$ no* es acotado.

**Observacion 3.4** *De la Proposicion 3.8 tenemos*

$$\{F_z(H_o)\}_{z \in A} \subset B(L^2([-\pi, \pi])) \, .$$

Al operador $F_z(H_o)$ lo llamaremos: Operador Resolvente de $H_o$. Otra notación para este operador es $R(z, H_o)$.

Así, tenemos

**Observación 3.5** *$A \subset \rho(H_o)$ y $\rho(H_o) \neq \emptyset$, donde $\rho(H_o)$ es el conjunto resolvente* de $H_o$.

**Observación 3.6** *De las observaciones 3.2, 3.5 y desde que $\mathbb{C} = \{k^2\}_{k \in Z} \cup A$ entonces $\sigma_p(H_o) = \{k^2\}_{k \in Z}$, $\rho(H_o) = A$ y $\sigma_c(H_o) = \sigma_r(H_o) = \emptyset$.*

Además, se tiene

**Observación 3.7 (Existencia de solución)** *Sea $z \in A$,*

$$\forall g \in L^2([-\pi, \pi]) \; \exists! f \in Dom(H_o) \subset L^2([-\pi, \pi]) \; tal \; que \; (H_o - z)f = g \qquad (3.4)$$

*donde $f := F_z(H_o)g = (H_o - z)^{-1}g = R(z, H_o)g$.*

*Así, el problema en (3.4) posee una única solución.*

## 3.5 Caracterización de $F_z(H_o)$ vía la convolución

Usando que en $P'$, la transformada de la convolución es el producto de las convoluciones, tenemos otra caracterización para $F_z(H_o)$:

**Proposición 3.10** *Sea $z \in \mathbb{C}$ y $F_z(x) = \frac{1}{x-z}$ tal que $k^2 - z \neq 0$, $\forall k \in Z$ entonces*

$$F_z(H_o)f = G_z * f \, , \, \forall f \in L^2([-\pi, \pi]) \, ,$$

*donde $C_{per}([-\pi, \pi]) \ni G_z := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2-z}\phi_k$ y esta serie converge uniformemente.*

**Prueba.-** La prueba lo hemos organizado de la siguiente forma:

1. Probaremos que la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2-z}\phi_k$ converge uniformemente, $\forall z \in \mathbb{C}$ fijo tal que $z \neq k^2$, $\forall k \in Z$. En efecto, como $\left|\frac{1}{k^2-z}\phi_k(x)\right| = \left|\frac{1}{k^2-z}e^{ikx}\right| = \frac{1}{|k^2-z|}$ y $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{k^2-z}e^{ikx}$, tenemos para $n < m$:

$$\begin{aligned} |S_m(x) - S_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2-z}e^{ikx} + \sum_{k=-m}^{-(n+1)} \frac{1}{k^2-z}e^{ikx} \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{|k^2-z|} + \sum_{k=-m}^{-(n+1)} \frac{1}{|k^2-z|} \\ &= 2\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{|k^2-z|} \, . \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Tomando supremo a la desigualdad (3.5) obtenemos

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[-\pi,\pi])} |S_m(x) - S_n(x)| &\leq 2\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{|k^2 - z|} \\ &= 2\left\{\frac{1}{|(n+1)^2 - z|} + \dots \frac{1}{|(m)^2 - z|}\right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Tomando límite a la desigualdad (3.6) cuando $n, m \to +\infty$ tenemos que la sucesión $(S_n)$ es de Cauchy en $C_{per}([-\pi, \pi])$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ y por lo tanto $S_n$ es convergente en $(C_{per}([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_\infty)$, denotamos a ese límite como $G_z$ i.e. $S_n$ converge uniformemente.

2. Luego, como el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es continua, entonces $G_z$ es continuo y puntualmente vale: $G_z(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2-z}\phi_k(x)$.

3. Obviamente, como las $\phi_k$ son periódicas, la unicidad del límite de la serie nos conduce a que $G_z$ es periódica. Así, $G_z \in C_{per}([-\pi, \pi])$.

Finalmente, sea $f \in L^2([-\pi, \pi]) \subset P'$ aplicamos $F_z(H_o)$, y usando que en $P'$ es válido que la transformada de la convolucion es el producto de las convoluciones obtenemos:

$$\begin{aligned} F_z(H_o)f &= R(z, H_o)f \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{k^2 - z}\phi_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - z}\widehat{f}(k)\phi_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{G_z}(k)\widehat{f}(k)\phi_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{G_z * f}(k)\phi_k \\ &= G_z * f \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde $G_z = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k^2-z}\phi_k$.

**Observacion 3.8** *Si $z \in A$ entonces $R(z, H_o)f = G_z * f$, $\forall f \in L^2([-\pi, \pi])$, donde $G = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k^2-z}\phi_k$.*

**Observacion 3.9** *Sea $z \in A$, si $g \in L^2([-\pi, \pi])$ entonces $L^2([-\pi, \pi]) \supset Dom(H_o)$ 3 $f = G_z * g$ es solución de (3.4).*

## *3.6* Existencia de solución de una ecuación distribucional

**Proposición 3.11** *Sea $z \in ₵$ y $F_z(x) = \frac{1}{x-z}$ tal que $k^2 - z \neq 0$, $\forall k \in Z$ entonces $G := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k^2-z}\phi_k$ es solución de la ecuación distribucional*

$$\left| \begin{array}{l} \exists f \in P' \; tal\ que \\ -f'' - zf = 2\pi\delta\,. \end{array}\right. \quad (3.8)$$

**Prueba.**En efecto, sea $\varphi \in P$ y como $G_z \in C_{per}(-\pi, \pi]) \subset P'$, tenemos

$$\begin{aligned}(-G_z'' - zG_z, \varphi) &= -(G_z'', \varphi) - (zG_z, \varphi) \\ &= (G_z, -\varphi'') - (G_z, z\varphi) \\ &= (G_z, -\varphi'' - z\varphi)\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ahora, observamos que

$$\begin{aligned}\{-\varphi'' - z\varphi\}^\wedge(k) &= -\widehat{\varphi''}(k) - z\widehat{\varphi}(k) \\ &= -(ik)^2\widehat{\varphi}(k) - z\widehat{\varphi}(k) \\ &= (k^2 - z)\widehat{\varphi}(k)\,. \end{aligned}$$

Luego

$$-\varphi'' - z\varphi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(k)(k^2 - z)\phi_k\,. \tag{3.10}$$

También,

$$\begin{aligned}(k^2 - z)(G_z, \phi_k) &= (k^2 - z)\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m^2 - z} e^{imx} e^{ikx} dx \\ &= (k^2 - z)\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m^2 - z}\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{ikx} dx \\ &= (k^2 - z)\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m^2 - z}\delta_{k,m} 2\pi \\ &= 2\pi\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Usando (3.10) y (3.11) en (3.9) obtenemos

$$\begin{aligned}(-G_z'' - zG_z, \varphi) &= (G_z, \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(k)(k^2 - z)\phi_k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(k)\underbrace{(k^2 - z)(G_z, \phi_k)}_{=2\pi} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(k) \\ &= 2\pi\varphi(0) \\ &= 2\pi(\delta_0, \varphi) \\ &= (2\pi\delta, \varphi)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $-G_z'' - zG_z = 2\pi\delta$ en $P'$.

Ahora, veamos que si $f \in P'$ es solución de (3.8) entonces su expresión es $G_z$. En

efecto, tomando la transformada de Fourier a la ecuación obtenemos

$$k^2\widehat{f}(k) - z\widehat{f}(k) = 2\pi\widehat{\delta}(k) = 1$$

esto es, $\widehat{f}(k) = \frac{1}{k^2-z}, \forall k \in \mathbb{Z}$ desde que z ∈ A. Luego, $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2-z}\phi_k$.

## 4 I CONCLUSIONES

En nuestro estudio hemos realizado lo siguiente:

1. Hemos estudiado al operador $D$ y su compuesta $D^2$ en $L^2([-\pi, \pi])$, mostrando sus propiedades.

2. Introducimos un operador $H_o$ en $L^2([-\pi, \pi])$, que es una extensión de $D^2$, y hemos probado que está densamente definida, es no acotada, simétrica y que no admite extensión lineal simétrica a $L^2([-\pi, \pi])$.

3. Introducimos otro operador $F_z(H_o)$ en $L^2([-\pi, \pi])$ y hemos probado que está en el espacio $B(L^2([-\pi, \pi]))$, para todo $z \in A$. Así también, se probó que este operador es el resolvente de $H_o$ en $z \in A$.

4. Usando la convolución se encontró una caracterización para el operador acotado $F_z(H_o)$.

5. También, tratamos el problema de existencia de solución de un problema distribucional, evidenciando su solución.

6. Finalmente, queremos enfatizar que este estudio puede ser generalizado a los espacios de Sobolev periódico.

## REFERENCIAS


**[1** ] Iorio, R. and Iorio V. Fourier Analysis and partial Differential Equations. Cambridge University. 2001.

**[2** ] Kreyszig E. Introductory functional analysis with applications. John Wiley and Sons. 1978.

**[3** ] Candia Estrada, V. and Santiago Ayala, Y. Existencce of the solution of a Schrodinger type homogeneous model in Periodic Sobolev spaces. Selecciones Matemáticas. 2022; 09(02): 357-369.

**[4** ] Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit. Bulletin of the Allahabad Mathematical Society. 2017; 32(02): 207-230.

**[5** ] Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Existencia y regularidad de solución de la ecuación del calor en espacios de Sobolev Periódico. Selecciones Matemáticas. 2019; 06(01): 49-65.

**[6** ] Santiago Ayala, Y. Results on the well posedness of a distributional differential problem. Selecciones Matemáticas. 2021; 08(02): 348-359.

**[7** ] Santiago Ayala, Y. Existence and continuous dependence of the local solution of non homogeneous third order equation and generalizations. Transactions on Machine Learning and Artificial Intelligence. 2022; 10(05): 43-56.

**[8** ] Santiago Ayala, Y. Group of weakly continuous operators associated to a generalized Schr¨odinger type homogeneous model. Journal of Applied Mathematics and Physics. 2023; 11(04): 919-932.

**[9** ] Santiago Ayala, Y. Inmersiones y propiedades de los espacios de Sobolev periódico. Matemática: O sujeito e o conhecimento matemático 2. 2023; 66-87.

**[10** ] Santiago Ayala, Y. El espacio Distribucional periódico $L^2([-\pi, \pi])$ como completamiento del espacio $P$ . Construção e difusão do conhecimento matemático. 2023; 34-60.

# CÁLCULO DO INDICADOR ODS 11.7.1: ESTUDO DE CASO COM BASE EM DADOS DE FONTES ABERTAS

*Data de aceite: 02/10/2023*

**Isis Gonçalves Peixoto**

**RESUMO:** O presente estudo tem como objetivo a avaliação da exequibilidade de se calcular o Indicador ODS 11.7.1 para uma amostra específica da cidade do Rio de Janeiro, estado do Rio de Janeiro, Brasil. Este indicador é definido como a proporção da área construída nas zonas urbanas que é dedicada ao espaço público aberto, com ênfase na acessibilidade para todos os grupos demográficos, nomeadamente, com base em critérios de sexo, faixa etária e presença de deficiências. O ODS 11, inserido no contexto mais amplo dos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável, concentra-se na consecução de cidades e comunidades sustentáveis, almejando torná-las mais inclusivas, seguras, resilientes e ecologicamente sustentáveis. O alvo específico do ODS 11.7 é a promoção, até o ano de 2030, do acesso universal a espaços verdes e públicos que sejam seguros, inclusivos e acessíveis, com particular ênfase em garantir o acesso a esses espaços para mulheres, crianças, idosos e indivíduos com deficiências. A presente pesquisa visa investigar a viabilidade de estabelecer esse indicador em uma área geográfica selecionada, utilizando fontes de dados abertos que incluem imagens de satélite e informações governamentais. A área de interesse delimitada para este estudo abrange o bairro de Ipanema, situado na zona sul da cidade do Rio de Janeiro. Este bairro foi escolhido devido à sua significativa concentração populacional de indivíduos com deficiências. Vale ressaltar que este estudo se restringirá à análise da proporção de áreas públicas abertas, sem considerar informações demográficas da população local, as quais serão objeto de investigação em um estudo futuro.

**PALAVRAS-CHAVE:** ODS, Agenda 2030, Objetivos de Desenvolvimento Sustentável, ODS 11, Cidades e Comunidades Sustentáveis.

## CALCULATION OF INDICATOR 11.7.1: AVERAGE SHARE OF THE BUILT-UP AREA OF CITIES THAT IS OPEN SPACE FOR PUBLIC USE FOR ALL BASED ON DATA FROM OPEN SOURCES.

**ABSTRACT:** The present study aims to assess the feasibility of calculating Indicator

ODS 11.7.1 for a specific sample within the city of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro state, Brazil. This indicator is defined as the proportion of built-up area within urban zones that is dedicated to open public spaces, with an emphasis on accessibility for all demographic groups, specifically based on gender, age, and the presence of disabilities. ODS 11, situated within the broader context of the Sustainable Development Goals, focuses on achieving sustainable cities and communities, with the goal of making them more inclusive, safe, resilient, and ecologically sustainable. The specific target of ODS 11.7 is the promotion, by the year 2030, of universal access to green and public spaces that are safe, inclusive, and accessible, with a particular emphasis on ensuring access to these spaces for women, children, the elderly, and individuals with disabilities. The current research aims to investigate the feasibility of establishing this indicator in a selected geographical area, using open data sources that include satellite imagery and government information. The defined area of interest for this study encompasses the neighborhood of Ipanema, located in the southern zone of the city of Rio de Janeiro. This neighborhood was chosen due to its significant concentration of individuals with disabilities. It is worth noting that this study will be limited to the analysis of the proportion of open public areas, without considering demographic information of the local population, which will be the subject of investigation in a future study.
**KEYWORDS:** SDG, Agenda 2030, Sustainable Development Goals, SDG 11, Sustainable Cities and Communities.

## INTRODUÇÃO

Com o avanço tecnológico, dados e informações mais estruturados, anteriormente inacessíveis ao público em geral, agora estão disponíveis de forma mais acessível e compreensível por meio de tabelas e mapas, principalmente devido à proliferação da internet. A disseminação desses dados e microdados é facilitada por órgãos públicos de estatística (JANUZZI, 2009). Com a necessidade crescente de dados e informações, combinado com os desafios crescentes na realização de pesquisas tradicionais devido às elevadas taxas de não resposta e aos custos envolvidos, gerou a demanda por fontes alternativas de dados, incluindo registros administrativos e *big data*. O termo “*big data*”, em tradução livre como “grandes dados,” não se limita apenas à quantidade, conforme destacado por MacFeely (2019). Ele refere-se a informações de elevado volume, velocidade e variedade provenientes de diversas fontes.

O termo “*big data*” é geralmente associado a tecnologias específicas que viabilizam sua utilização. A explosão nos volumes de dados está intrinsecamente ligada ao aumento no registro de informações, uma tendência impulsionada pela proliferação de dispositivos tecnológicos incorporados à nossa rotina diária, incluindo a disseminação recente de sensores e a Internet das Coisas (IoT) (MAURO et al., 2015). Esses dados podem adotar uma ampla variedade de formatos, como imagens, textos e áudios, e provêm de diversas fontes. MacFeely (2019) levanta uma questão crucial sobre a representatividade e estabilidade desses dados para a sua utilização em indicadores e estatísticas oficiais. O próprio autor reconhece que agências estatísticas têm recorrido a diversas fontes para

compilar dados e construir indicadores. De acordo com suas observações, 34 agências estatísticas em todo o mundo registraram 109 projetos de dados provenientes de fontes tão diversas como imagens de satélite, scanners, medidores, sensores e registros de dados, entre outras. Porém, apesar da aparente abundância de fontes de dados, o seu uso enfrenta desafios significativos.

Entretanto, é válido ressaltar que pesquisadores têm adotado análises de big data em diversas esferas de pesquisa, abarcando tópicos que variam desde a erradicação da pobreza até questões relacionadas à agricultura e à saúde. Entre as fontes de dados de destaque utilizadas para esse fim, incluem-se as imagens noturnas de satélite, registros de comunicações móveis e publicações em redes sociais, como os tweets. Estas fontes proporcionam uma maneira economicamente viável de capturar dados em tempo real em comparação com as abordagens convencionais (BOHON, 2018).

As observações da Terra têm sido empregadas em múltiplos contextos para iluminar aspectos específicos do desenvolvimento humano, abrangendo tópicos como produção econômica, demografia, urbanização, uso da terra e recursos naturais, bem como condições meteorológicas, mudanças climáticas e monitoramento da poluição. Concomitantemente, tem sido observado um aumento na utilização da luz noturna como um dos principais subprodutos da sensoriamento remoto por satélite, sendo empregada como proxy para a avaliação de fenômenos de natureza econômica, social e ambiental (SAVIO et al., 2020).

A disponibilidade de imagens de satélite em várias resoluções, de forma gratuita, representou uma oportunidade significativa para que a sociedade se aproximasse da utilização desta tecnologia de ponta. No entanto, para a análise desses dados, é imperativo o desenvolvimento de algoritmos robustos que capacitem a extração das informações contidas nas imagens. Atualmente, essa capacidade de análise de imagens de satélite desempenha um papel fundamental em setores como o agronegócio e o urbanismo, entre outros (ZANOTTA e FERREIRA, 2019).

Simultaneamente, diante da crescente demanda por fontes alternativas de dados, emerge a necessidade premente de construir indicadores abrangendo aspectos sociais, econômicos e ambientais. É nesse contexto que se insere a Agenda 2030 da Organização das Nações Unidas (ONU) e o objetivo deste estudo (ONU, 2015).

A Agenda 2030 para o Desenvolvimento Sustentável constitui um desdobramento de um processo global e participativo conduzido pela Organização das Nações Unidas (ONU), seguindo a evolução a partir da Agenda de Desenvolvimento do Milênio e expandindo suas áreas de abrangência. Esta agenda abarca uma ampla gama de dimensões, incluindo o fomento do desenvolvimento econômico, a erradicação da pobreza e da indigência, a garantia da sustentabilidade ambiental e a promoção da boa governança em todos os níveis de governança, incorporando ainda a busca pela paz e segurança (ONU, 2015).

Lançada no ano de 2015, a Agenda 2030 para o Desenvolvimento Sustentável sustenta que a urbanização, quando devidamente planejada e gerenciada, pode se

configurar como uma poderosa ferramenta para a consecução do desenvolvimento sustentável, independentemente do estágio de desenvolvimento de um país (ONU, 2015). Os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) representam uma convocação global para a erradicação da pobreza, a preservação do meio ambiente e do clima, e estão intrinsecamente vinculados ao cumprimento da Agenda 2030 (ONU, 2018). Conforme salientado por Gil (2017), os ODS constituem a agenda global de ação coletiva mais abrangente e ambiciosa, que busca o equilíbrio entre as dimensões econômica, social e ambiental, visando a consecução do desenvolvimento sustentável, mesmo diante das restrições inerentes à realização dessas metas.

Adicionalmente, em 2016, a ONU Habitat lançou a Nova Agenda Urbana, comprometendo-se com o desenvolvimento de planejamento urbano e territorial sustentável. Isso envolve a promoção de cidades compactas, densas e o controle da expansão urbana, ressaltando a relação entre urbanização adequada e desenvolvimento. Nesse contexto, considera-se fundamental incorporar oportunidades e qualidade de vida, bem como a geração de empregos nas estratégias de renovação urbana (ONU, 2019).

Essa conexão entre a Nova Agenda Urbana e a Agenda 2030 para o Desenvolvimento Sustentável, especialmente com relação ao Objetivo de Desenvolvimento Sustentável 11, que aborda cidades e comunidades sustentáveis, é o foco central deste estudo. Portanto, a obtenção de dados de alta qualidade, confiáveis e desagregados, provenientes de fontes oficiais, revela-se como um requisito essencial para a construção desses indicadores (ONU, 2018). Os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável representam um apelo global à ação com o propósito de erradicar a pobreza, preservar o meio ambiente e o clima, bem como garantir a paz e a prosperidade para todas as pessoas em todo o mundo. Esses objetivos constituem o compromisso das Nações Unidas na contribuição para o alcance da Agenda 2030 no contexto brasileiro (UN, 2021).

Os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) representam uma convocação global para a erradicação da pobreza, a preservação do meio ambiente e do clima, e estão intrinsecamente vinculados ao cumprimento da Agenda 2030 (ONU, 2018). Conforme salientado por Gil (2017), os ODS constituem a agenda global de ação coletiva mais abrangente e ambiciosa, que busca o equilíbrio entre as dimensões econômica, social e ambiental, visando a consecução do desenvolvimento sustentável, mesmo diante das restrições inerentes à realização dessas metas.

Adicionalmente, em 2016, a ONU Habitat lançou a Nova Agenda Urbana, comprometendo-se com o desenvolvimento de planejamento urbano e territorial sustentável. Isso envolve a promoção de cidades compactas, densas e o controle da expansão urbana, ressaltando a relação entre urbanização adequada e desenvolvimento. Nesse contexto, considera-se fundamental incorporar oportunidades e qualidade de vida, bem como a geração de empregos nas estratégias de renovação urbana (ONU, 2019).

Essa conexão entre a Nova Agenda Urbana e a Agenda 2030 para o Desenvolvimento

Sustentável, especialmente com relação ao Objetivo de Desenvolvimento Sustentável 11, que aborda cidades e comunidades sustentáveis, é o foco central deste estudo. Portanto, a obtenção de dados de alta qualidade, confiáveis e desagregados, provenientes de fontes oficiais, revela-se como um requisito essencial para a construção desses indicadores (ONU, 2018). Os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável representam um apelo global à ação com o propósito de erradicar a pobreza, preservar o meio ambiente e o clima, bem como garantir a paz e a prosperidade para todas as pessoas em todo o mundo. Esses objetivos constituem o compromisso das Nações Unidas na contribuição para o alcance da Agenda 2030 no contexto brasileiro (UN, 2021).

## BASE DE DADOS E MÉTODO

Conforme observado por Bravo e Sluter (2015), o crescente uso de dados espaciais em diversas áreas do conhecimento tem desencadeado uma revolução geoespacial, impulsionada pela disponibilidade universal e gratuita de grandes volumes de dados espaciais e software. Esse fenômeno tem resultado no aumento do número de usuários de mapeamento que não possuem formação especializada, destacando assim a importância de abordar a qualidade dos dados espaciais.

A inserção de usuários não especializados em cartografia na produção de informações espaciais gerou discussões substanciais sobre o novo paradigma de análise da qualidade dos dados espaciais (BRAVO e SLUTER, 2015). Segundo Santos et al. (2016), na área cartográfica, a avaliação da qualidade de dados espaciais requer a consideração de diversos elementos, tais como acurácia posicional, acurácia temporal, completude, consistência lógica e temporalidade, tornando, assim, a análise um processo complexo (SANTOS et al., 2016, p. 2).

Para a classificação da cobertura terrestre e uso do solo, diferentes abordagens podem ser empregadas, incluindo a vetorização manual e a automação por meio de algoritmos supervisionados ou não supervisionados. No método manual, a interpretação visual das informações é realizada, e as classes de interesse são atribuídas manualmente a cada porção territorial. Embora eficaz, essa técnica pode ser demorada quando aplicada a áreas extensas (BRAVO e SLUTER, 2015).

No presente estudo, a classificação foi conduzida manualmente devido ao tamanho limitado da área de interesse, que não demandava a automatização do processo. A unidade geográfica escolhida para a análise é a área de ponderação que engloba o Bairro de Ipanema, localizado na cidade do Rio de Janeiro, na Zona Sul. A seleção dessa área se deve à sua urbanização regular e ao fato de ser o bairro com o maior número de pessoas com deficiência na região, conforme ilustrado na Figura 1 a seguir.

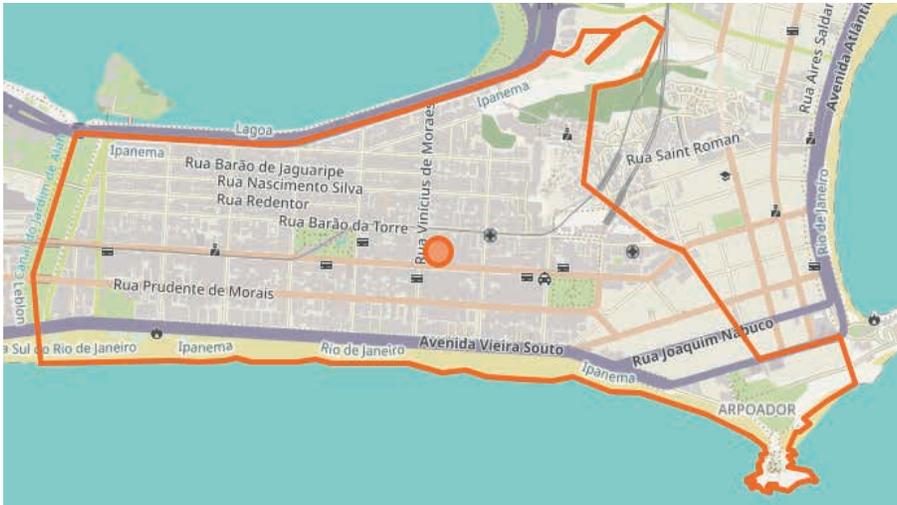



**Figura 1:** Delimitação do Bairro de Ipanema RJ

**Fonte:** OpenStreetMap® (2021)

As áreas de ponderação são unidades geográficas que foram estabelecidas para os Censos de 2000 e 2010, consistindo na combinação exclusiva de setores censitários contíguos. Essas áreas foram criadas com o propósito de permitir a aplicação da calibração dos pesos amostrais e são as menores unidades geográficas capazes de proporcionar representatividade estatística a partir das amostras coletadas nos Censos Demográficos (IBGE, 2010).

No contexto da construção do indicador neste estudo, será realizado apenas o cálculo do indicador geral para a área em análise, uma vez que a desagregação dos dados populacionais é essencial para o cálculo do indicador em nível municipal. Nesse contexto, a pesquisa se concentra na investigação de uma unidade geográfica delimitada.

Além disso, busca-se a harmonização dos dados e recursos, aderindo às definições de cidade, urbanização e espaços públicos abertos conforme estabelecidas pela ONU. Antes de calcular as áreas de Espaços Públicos Abertos (EPA's), é imprescindível aclarar alguns conceitos. Optou-se por adotar as definições da ONU, conforme descritas no Módulo de Treinamento: Espaço Público do indicador em análise, como base para este estudo.

## CONCEITOS

O Módulo de Treinamento: Espaço Público da ONU Habitat, relativo ao Indicador ODS 11.7.1 (UN-Habitat, 2018), desempenha um papel fundamental ao estabelecer definições que simplificam a construção desse indicador por parte de cidades e países.

Este indicador adota a conceituação de "Cidade" como uma entidade operacional que engloba áreas construídas e espaços abertos, frequentemente ultrapassando os

limites formais de administração. Essa definição segue o conceito de “extensão urbana” desenvolvido pela Universidade de Nova Iorque, resultando de uma análise global de 200 cidades.

A “Área Construída” é caracterizada como a porção contígua de uma cidade ocupada por edifícios e outras superfícies impermeáveis, ou seja, a área funcional da cidade.

O “Espaço Público” é identificado como “todos os lugares de propriedade pública ou uso público, acessíveis e agradáveis para todos de forma gratuita e não lucrativa”. Essa definição enfatiza a propriedade pública como garantia de acesso contínuo ao longo do tempo. Ademais, o “Espaço Público” é subdividido em quatro tipologias: ruas, espaços públicos abertos, equipamentos públicos e mercados.

As ruas são vias públicas situadas em vilas, cidades e bairros, enquanto os “Espaços Públicos Abertos” referem-se a terrenos não urbanizados ou sem edifícios acessíveis ao público, que proporcionam áreas de lazer para os residentes. Esses espaços são categorizados em quatro níveis com base em tamanho e área de cobertura: espaços públicos locais/pequenos, espaços abertos regionais/parques de cidades maiores, instalações públicas e espaços comerciais públicos, bem como terrenos alocados para ruas.

O Módulo de Treinamento do ODS 11.7.1 apresenta procedimentos para a computação deste indicador, com a primeira parte identificando as ferramentas necessárias e suas potenciais fontes. A segunda parte oferece instruções passo a passo sobre os métodos de cálculo e a estimativa da quantidade de terreno destinada aos espaços públicos abertos. Por fim, a terceira parte aborda como estimar a parcela da população com acesso a esses espaços.

Para o cálculo deste indicador, fontes de dados sobre ruas e espaços abertos urbanos são cruciais. Neste estudo, foram utilizados mapas da malha urbana fornecidos pelo Instituto Pereira Passos (IPP), órgão de pesquisa do governo da cidade do Rio de Janeiro responsável pela produção e divulgação de informações municipais. Esses mapas foram obtidos através do portal Armazém de Dados do Data.Rio e posteriormente convertidos em arquivos .dwg, sendo analisados em um software de licença estudantil gratuita.

Adicionalmente, dados de imagens aéreas do Google Earth® e OpenStreetMap® foram empregados para a comparação da configuração da malha urbana com as imagens de satélite atuais, bem como para realizar correções necessárias.

A definição de acesso igualitário, conforme estipulada pelo ODS, baseia-se na ausência de restrições para acessar e utilizar determinados espaços em uma distância predefinida a pé, sendo necessário observar determinadas suposições para sua aplicação.

i. Acesso igual a cada espaço por todos os grupos de pessoas ou seja, crianças, pessoas com deficiência, mulheres e idosos podem caminhar uma distância de 400 metros (por 5 minutos) para acessar esses espaços;

ii. Todos os espaços estão abertos para uso por todos ou seja, não há

limitações para o acesso ao espaço;

iii. Todas as ruas podem ser percorridas a pé sem impedimentos;

iv. Todos os espaços públicos abertos têm áreas iguais de influência que é medida em 400 metros ao longo das redes de ruas;

v. Todos os edifícios dentro da área são habitáveis, e que a população é igualmente distribuída em todos as áreas construídas.

A identificação de espaços públicos abertos dentro das cidades pode ser realizada por meio de diversas fontes, incluindo a análise de imagens de satélite de alta a muito alta resolução, mapas básicos disponibilizados por diferentes organizações (como OpenStreetMap®, Esri®, entre outras), bem como a contribuição de crowdsourcing e voluntários na coleta de dados.

Embora essas fontes forneçam dados fundamentais para a construção do indicador 11.7.1, é importante destacar que alguns dos espaços identificados podem não cumprir os critérios necessários para serem considerados “acessíveis ao público gratuitamente”. Nesse contexto, utiliza-se o termo “espaço público aberto potencial” para fazer referência aos espaços públicos abertos que são extraídos das fontes mencionadas anteriormente com base em suas características espaciais. No entanto, esses espaços ainda não foram validados para confirmar se estão, de fato, disponíveis ao público sem custos.

## COMPUTANDO O INDICADOR

Conforme os metadados do indicador sugerem, para estabelecer a cidade como a unidade de análise, é imperativo dispor de dados relacionados às áreas construídas. Tais informações podem ser adquiridas de fontes abertas, tais como imagens de satélite, documentos públicos de propriedade de terras e mapas (UN, 2021). Neste contexto, empregamos imagens de satélite do Google Earth® e do OpenStreetMap®, em conjunto com os mapas de malha urbana disponibilizados pelo Instituto Pereira Passos (IPP) do município do Rio de Janeiro. Cabe ressaltar que as imagens utilizadas foram atualizadas em março de 2021.

A escolha da área de ponderação do Censo 2010, correspondente ao bairro de Ipanema, seguiu um processo em duas etapas. Primeiramente, optou-se por selecionar um bairro entre as Zonas Sul e Norte, com preferência pela Zona Sul devido à sua urbanização mais regular. Em seguida, Ipanema foi escolhido dentro dos bairros da Zona Sul devido à sua concentração significativa de pessoas com deficiência. No entanto, é relevante notar que os dados populacionais não serão empregados nesta etapa da pesquisa.

Para compilar o inventário de Espaços Públicos Abertos (EPA’s), recorremos aos mapas de uso e ocupação do solo fornecidos pelo IPP. Esses dados foram complementados com informações provenientes do OpenStreetMap® e submetidos a uma verificação visual

adicional por meio do Google Street View®.

A definição dos limites funcionais do bairro foi o primeiro passo essencial para o cálculo do indicador, pois ajudou a delimitar a extensão da coleta de dados. As etapas executadas compreenderam:

1. Cálculo da área ocupada por ruas.

2. Cálculo da área ocupada por espaços públicos abertos, incluindo áreas não construídas de instalações públicas.

3. Cálculo da porção total da cidade que é construída, a qual neste indicador é usada para inferir a área funcional da cidade, conforme definido por meio da análise das áreas construídas.

Foi elaborado um mapa utilizando as ferramentas AutoCAD® e QGIS®, conforme exemplificado na Figura 2, onde as áreas foram segregadas de acordo com as tipologias estabelecidas pelo ODS. Isso permitiu a posterior computação dos valores em uma tabela.

Na Figura 2, é apresentado o mapa abrangente do bairro de Ipanema, com áreas distintas delimitadas, tais como vias públicas, áreas de praças, parques e lazer, incluindo a faixa de areia que também se enquadra nas áreas de lazer, e, por último, as áreas de edificações.

**Figura 2:** Mapa Definições ODS 11.7.1

**Fonte:** Elaborado pela autora (2023)

A estimativa das áreas destinadas às vias públicas foi realizada por meio da análise dos dados disponíveis no mapa do bairro fornecido pelo IPP em formato CAD, sendo posteriormente validada por meio de imagens de satélite disponíveis no Google Earth®. O mapeamento urbano da região proporcionou informações dimensionais detalhadas sobre

as vias públicas, cujos valores foram calculados utilizando o software AutoCAD®.

Na Figura 3, é possível visualizar as áreas designadas para praças, parques, áreas de lazer e a faixa de areia, considerando que as praias públicas são computadas como parte dos espaços públicos abertos.

**Figura 3:** Mapa das Áreas Praças, Parques e Faixa de Areia

**Fonte:** Elaborado pela autora (2023)

Na Figura 4, a seguir, é possível visualizar o mapa de arruamento, que comporta as ruas e calçadas, eventuais calçamentos de rotatórias e canteiros centrais.

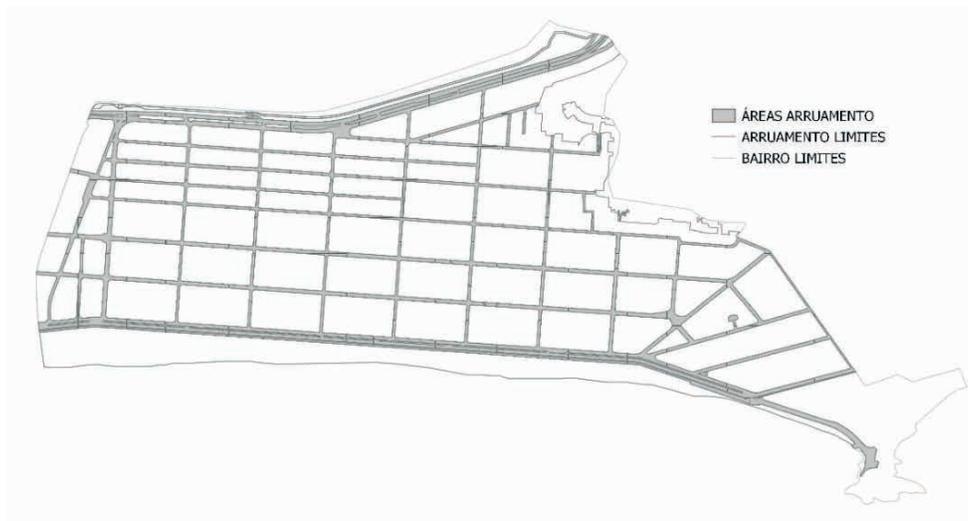



**Figura 4** Mapa das Áreas de Arruamento – Ruas e Calçadas

**Fonte:** Elaborado pela autora (2023)

Por fim, na Figura 5, apresentamos o mapa das áreas com edificações. Essa área desempenhou um papel crucial como ponto de referência para comparar os cálculos dos espaços públicos abertos e para verificar qualquer discrepância decorrente de erros de mapeamento.

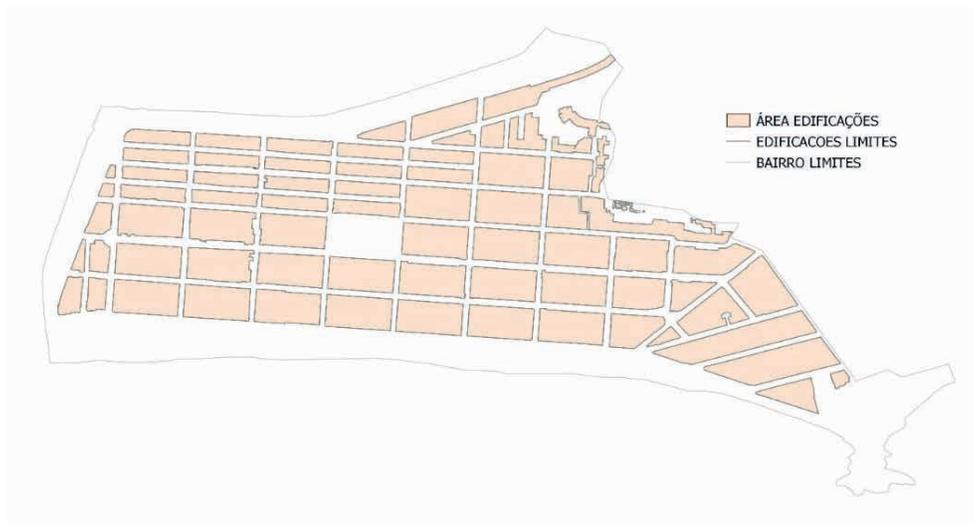



**Figura 5:** Mapa das Áreas de Edificações

**Fonte:** Elaborado pela autora (2023)

Já na Tabela 1, são apresentadas as áreas computadas desagregadas por tipologia de uso do solo, como calçamento ou edificações.

| Áreas | m ² | ≅ km ² |
|---|---|---|
| Total Bairro | 1.844.373,7922 | 1,84 |
| Edificações | 927.263,1258 | 0,93 |
| Ruas e Calçadas | 560.795,4929 | 0,56 |
| Praças e Parques | 151.635,4920 | 0,15 |
| Faixa de Areia (praia pública) | 148.010,8079 | 0,15 |
| EPA (Áreas públicas Abertas) | 860.441,7928 | 0,86 |

**Tabela 1:** Áreas Desagregadas

Para obter a porcentagem de terreno atribuído às ruas sua área foi dividida pela área total e multiplicado por 100, os resultados e demonstrações dos cálculos são apresentados a seguir na Figura 6:

$$\text{Terrenos da Cidade Alocados para Ruas} = 100 \times \left[ \frac{\text{Superfície Total das Ruas Urbanas}}{\text{Superfície Total da Area Urbana}} \right]$$

$$\text{Terrenos da Cidade Alocados para Ruas} = 100 \times \left[ \frac{0{,}56\ km^2}{1{,}84\ km^2} \right] = 30{,}43\%$$

**Figura 6:** Cálculo dos terrenos da cidade alocados para ruas.

**Fonte:** Elaborado pela autora (2023)

Ao contrário do subindicador que avalia a alocação de terrenos para ruas, cujo cálculo pode ser realizado exclusivamente com base em imagens de satélite e análise espacial, a determinação da proporção de áreas urbanas alocadas para espaços públicos abertos requer uma abordagem que combina interpretação de imagens com validação por especialistas de campo.

Neste contexto, os espaços públicos abertos abrangem terrenos não urbanizados ou com um mínimo de edifícios, e em alguns casos, terrenos completamente desprovidos de construções, desde que sejam acessíveis ao público e proporcionem áreas de lazer para os residentes, contribuindo para a valorização da estética e da qualidade ambiental dos bairros (UN-Habitat, 2018).

Os dados de entrada para este processo incluíram arquivos contendo os limites do bairro, imagens de alta resolução cobrindo a mesma área e informações do OpenStreetMap® referentes ao uso da terra e aos nomes de locais. Uma análise abrangente das características dos espaços, como tamanho, forma e cobertura do solo, foi conduzida com base nessas imagens. Após a definição dos Espaços Públicos Abertos (EPA's), suas áreas foram calculadas utilizando o software AutoCAD®, como ilustrado na Figura 7:

**Figura 7:** Cálculo da parte do terreno do bairro alocado para EPA.

**Fonte:** Elaborado pela autora (2023)

Para calcular o indicador principal, a parcela média de área construída de cidades que é Espaço Aberto para Uso Público para Todos (PEPA) , é utilizada a fórmula abaixo observada na Figura 8:

**Figura 8**: Cálculo da PEPA (Proporção de espaço público aberto)

**Fonte:** Elaborado pela autora (2023)

Este ODS calcula a proporção de Terrenos Alocados para Espaços Públicos Abertos (PEPA's) em áreas delimitadas com um raio de 400 metros. Essa abordagem se baseia na premissa genérica de que as pessoas que residem dentro de uma distância pré-definida a pé de um determinado espaço público podem acessá-lo e utilizá-lo facilmente, sem restrições. A "distância aceitável a ser percorrida a pé" foi estabelecida pela ONU-Habitat como sendo de 400 metros, o que equivale a aproximadamente 5 minutos de caminhada. Com base nessa definição, uma área de serviço, delimitada pela rede viária, é criada ao redor de cada espaço público, considerando a soleira de acesso de 400 metros. Para este artigo, apenas o cálculo geral será realizado (UN-Habitat, 2018).

Neste contexto, assume-se que todas as pessoas que residem nas áreas de serviço são consideradas como tendo acesso conveniente aos espaços públicos abertos. Também se parte do pressuposto de que todos os edifícios dentro da área de serviço são habitáveis, e que a população está distribuída de forma igualitária em todos os edifícios ou áreas edificadas, conforme definido no ODS.

A estimativa do número de pessoas que vivem em cada área de serviço pode ser obtida por meio do uso de dados de alta resolução fornecidos pelos escritórios nacionais de estatística. Nessa abordagem, a população com acesso a um determinado espaço público é calculada extrapondo-se os dados populacionais para determinar o número de pessoas que residem na área de serviço de um espaço específico. Esses dados podem ser facilmente desagregados por idade, sexo e presença de deficiências.

Embora o indicador permita a desagregação da população por idade, sexo e deficiências, este estudo calculou apenas o indicador geral, uma vez que a área geográfica considerada é uma amostra. Portanto, neste trabalho, não foram computadas as parcelas populacionais com acesso a esses espaços, resultando em valores idênticos para as PEPA's e para a proporção de terreno alocado para EPA.

## RESULTADOS E LIMITAÇÕES

De acordo com as diretrizes da ONU Habitat, é recomendada a alocação de aproximadamente 45% a 50% do terreno urbano para ruas e espaços públicos abertos, dos quais 30% a 35% devem ser destinados a ruas e calçadas, e 15% a 20% para espaços públicos abertos, como praças, parques e áreas de lazer.

A proporção calculada para o terreno do bairro destinado aos Espaços Públicos Abertos (EPA's) foi de 46,74%. Este valor está em conformidade com as recomendações da ONU, sendo subdividido em uma parcela alocada para ruas e calçadas de 30,43%, o que também está alinhado com a faixa de 30% a 35% preconizada pela ONU. A parcela destinada aos espaços públicos abertos, que incluem praças, parques e praias públicas, corresponde a 16,30%, também enquadrando-se na recomendação da ONU Habitat de 15% a 20%. Esses resultados são apresentados na Tabela 2 a seguir:

| | ONU Habitat | Ipanema |
|---|---|---|
| PEPA: Proporção do Terreno Alocado para EPA (Espaço Público Aberto) | 45-50% | 46,74% |
| Ruas e Calçadas | 30-35% | 30,43% |
| Praças, Parques, Áreas de Lazer (Excluindo Ruas e Calçadas) | 15-20% | 16,30% |

**Tabela 2:** Proporções de Espaços Públicos

Os resultados obtidos poderiam ser considerados satisfatórios se essas áreas proporcionassem acesso universal, independentemente de sexo, idade ou condições de mobilidade. A análise dos mapas e imagens de satélite revela que as calçadas são, em sua maioria, largas e acessíveis em quase todo o bairro, que está totalmente urbanizado, com exceção do trecho que abrange parte do morro do Cantagalo-Pavão-Pavãozinho.

No entanto, é importante notar a ausência de piso tátil ao longo do bairro. A instalação desse tipo de piso não requer grandes investimentos ou tecnologia avançada e garantiria a inclusão de pessoas com deficiência visual, independentemente do grau de deficiência.

Além disso, em muitas quadras, observa-se que as edificações se estendem sobre as áreas das calçadas, especialmente em estabelecimentos de alimentos, como restaurantes e padarias. Embora seja possível o acesso de cadeirantes às esquinas por meio do rebaixamento do meio-fio e da obstrução da faixa de drenagem, essa prática não está de acordo com as recomendações da NBR 9050, atualizada em 2015.

Outro aspecto a se considerar nos resultados é que as áreas públicas abertas não estão distribuídas de maneira equitativa por toda a cidade do Rio de Janeiro. Ipanema, apesar de ter um dos Índices de Desenvolvimento mais elevados da cidade e um forte apelo turístico, não reflete necessariamente a realidade de todas as regiões da cidade.

Embora a proporção de espaços públicos abertos esteja em conformidade com as recomendações da ONU, é importante destacar que isso por si só não garante acesso

universal, inclusivo e acessível a todas as pessoas. O indicador analisado não avalia a qualidade desses espaços nem a qualidade do acesso a eles. Portanto, embora o bairro de Ipanema atenda à proporção recomendada pela ONU em relação aos Espaços Públicos Abertos, ainda há desafios a serem enfrentados em termos de acessibilidade e inclusão.

## CONCLUSÕES

A utilização de dados oriundos de imagens de satélite e fontes governamentais abertas revelou-se altamente eficaz, proporcionando um nível de detalhe notável. A construção do indicador demonstra sua eficiência, especialmente quando os mapas da malha urbana são disponibilizados por agências governamentais e estão acessíveis a todos.

É crucial empreender esforços no desenvolvimento de métodos que utilizem ferramentas gratuitas e de código aberto para calcular não apenas este indicador, mas também outros. A criação de indicadores suplementares para avaliar a qualidade do acesso a esses espaços se mostra como uma iniciativa valiosa, sobretudo em nações marcadas pela desigualdade social, como o Brasil.

A expansão da disponibilidade de dados populacionais para delimitações geográficas mais restritas é uma necessidade premente. Observa-se uma escassez de dados relacionados às pessoas com deficiência no Brasil, o que aponta para a necessidade de aprimorar a coleta e disseminação dessas informações. É fundamental assegurar o acesso equitativo a espaços públicos, levando em consideração as dificuldades de locomoção enfrentadas por muitos. É notável que as maiores barreiras ao acesso ocorrem para as pessoas com mobilidade reduzida.

No atual cenário, para avançarmos na implementação da Agenda 2030 e atender aos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável, em particular o ODS 11, que busca tornar as cidades e comunidades mais inclusivas, seguras, resilientes e sustentáveis, dados estatísticos sobre a população são de suma importância. Sem esses dados, é inviável quantificar nossas necessidades e repensar nossa abordagem à construção e uso do espaço público. Tais informações são indispensáveis para alcançar um desenvolvimento urbano verdadeiramente sustentável.

## REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS **ABNT. NBR 9050/2015: Acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos**. Rio de Janeiro, 2015.

BRAVO, J. V. M; SLUTER, C. R. O **Problema da Qualidade de Dados Espaciais na Era das Informações Geográficas Voluntárias.** Bol. Ciênc. Geod. 21 (1), Mar 2015.

BOHON, S. A. **Demography in the Big Data Revolution: Changing the Culture to Forge New Frontiers**. Springer Nature, 2018.

GIL, C. G. **Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS): una revisión crítica**. Papeles de relaciones ecosociales y cambio global Nº 140 2017/18, pp. 107-118.

JANUZZI, P. de M. **Indicadores Socioeconômicos na Gestão Pública**. Departamento de Ciências da Administração/UFSC, Brasília, CAPES, UAB, 2009.

IBGE. **Censo Demográfico 2010: Resultados Gerais da Amostra por áreas de ponderação**. Disponível em: https://censo2010.ibge.gov.br/apps/areaponderacao/index.html. 2010. Acessado em: 30/11/2021.

MACFEELY, S. **The Big (data) Bang: Opportunities and Challenges for Compiling SDG Indicators**. United Nations Conference on Trade and Development, Switzerland, and Centre for Policy Studies, University College Cork, Ireland, 2019.

MAURO, A. de; GRECO, M; GRIMALDIM, M. **What is big data? A consensual definition and a review of key research topics**. American Institute of Physics, 2015.

ONU. **Agenda 2030**. Disponível em: https://odsbrasil.gov.br/home/agenda. 2015. Acessado em: 25/11/2021.

ONU. **Nova Agenda Urbana**. Disponível em: https://uploads.habitat3.org/hb3/NUA-Portuguese-Brazil.pdf. 2019.

ONU. **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável**. Disponível em: https://odsbrasil.gov.br/home/agenda acessado em 02/12/2021. 2018. Acessado em: 21/11/2021.

SANTOS, A. de P. dos; RODRIGUES, D. D; SANTOS, N. T; JUNIOR, J. G**. Validação da Acurácia Posicional em Dados Espaciais Utilizando Técnicas de Estatística Espacial: Proposta de Método e exemplo Utilizando a Norma Brasileira**. Bol. Ciênc. Geod. 22 (4), Dez 2016.

SAVIO, G; ANDREANO, M. S; BENEDETTI, R; PIERSIMONI, F. **Mapping Poverty of Latin American and Caribbean Countries from Heaven Through Night-Light Satellite Images**. Springer Nature, 2020.

UN-Habitat. **SDG indicator metadata (Harmonized metadata template format version 1.0)**. United Nations Human Settlement Programme (UN-Habitat), Nairobi, 2018.

UN-Habitat. **SDG Indicator 11.7.1 Training Module: Public Space**. United Nations Human Settlement Programme (UN-Habitat), Nairobi, 2018.

ZANOTTA, D. C; FERREIRA, M. P. **Processamento de Imagens de Satélite**. Ed. Oficina de Textos, 2019.

# PIBID: EXPERIÊNCIA E INICIAÇÃO A DOCÊNCIA DA MATEMÁTICA EM TEMPOS DE PANDEMIA

*Data de submissão: 25/08/2023* *Data de aceite: 02/10/2023*

**Amanda Gabriela Teles Borges Coelho**
Universidade do Planalto Catarinense
Lages – Santa Catarina
http://lattes.cnpq.br/2224960537113036

**Alexandre de Oliveira**
Universidade do Planalto Catarinense
Lages – Santa Catarina
Link:http://lattes.cnpq.br/3820330888875832

**Felipe Rodrigues de Oliveira**
Universidade do Planalto Catarinense
Lages – Santa Catarina
http://lattes.cnpq.br/9194506672333299

**Schayla Letyelle Costa Pissetti**
Universidade do Planalto Catarinense
Lages – Santa Catarina
http://lattes.cnpq.br/9051131431956851

**Madalena Pereira da Silva**
Universidade do Planalto Catarinense
Lages – Santa Catarina
http://lattes.cnpq.br/0471818332882195

**RESUMO:** O artigo apresenta uma experiência no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – Pibid da Universidade do Planalto Catarinense – UNIPLAC, vivenciado na Escola Municipal de Educação Básica Mutirão, em Lages SC durante os anos de 2020 e 2021. No artigo é relatado como ocorreu o desenvolvimento do projeto institucional nas aulas de Matemática, bem como a sua importância no contexto escolar, especialmente pelo fato de ser o período em que a educação, assim como outros diversos segmentos da sociedade, foi afetada pela pandemia da Covid-19. O projeto Pibid proporciona aos licenciandos suas primeiras experiências como docentes, de forma supervisionada. É através desse contato que os futuros profissionais da educação vão se constituindo professores, unindo o que aprendem na universidade às experiências vivenciadas na realidade escolar, interligando a teoria e a prática docente. Para a escola, o projeto traz a integração entre educação superior e a educação básica, colaborando com a melhoria do ensino e a aprendizagem estudantil. Para os licenciandos, oportuniza descobertas, ensinamentos, autoavaliações, e, principalmente, a possibilidade de vivenciar o contexto escolar, de forma prática e supervisionada, com o intuito de aprimorar as práticas pedagógicas.

**PALAVRAS-CHAVE:** Educação Básica; Pibid; Iniciação à docência, Matemática;

Covid-19.

## PIBID: EXPERIENCE AND INITIATION TO MATHEMATICS TEACHING IN PANDEMIC TIMES

**ABSTRACT:** This article presents an experience in the Institutional Program of Scholarships for Teaching Initiation PIBID, at the University of Planalto Catarinense UNIPLAC, experienced at the Mutirão Municipal School of Basic Education, in Lages SC, during the years 2020 and 2021. In the article, it is reported how the development of the institutional project occurred in Mathematics classes, as well as its importance in the academic context, especially due to the fact that education, along with various other sectors of society, was affected by the Covid-19 pandemic. The PIBID project provides future teachers with their first supervised teaching experiences. It is through this contact that future education professionals start building their careers as teachers, combining what they learn at university with their experiences in the school setting, bridging the gap between theory and teaching practice. For schools, the project brings integration between higher education and basic education, contributing to the improvement of teaching and student learning. For undergraduate students, it provides opportunities for discoveries, learning, self-assessment, and, mainly, the possibility of experiencing the school context in a practical and supervised manner, aiming to enhance their pedagogical practices.
**KEYWORDS:** Basic Education; PIBID; Teaching initiation, Mathematics; Covid-19.

## 1 I INTRODUÇÃO

O Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid), é um programa que oferece bolsas aos estudantes dos Cursos de licenciaturas para que os mesmos iniciem sua formação nas escolas da rede pública de ensino, oportunizando experiências e vivências diretamente com os estudantes e professores da educação básica.

O programa visa a união das secretarias estaduais e municipais de educação e as universidades, em busca da melhoria do ensino nas escolas públicas. Com essa iniciativa, o Pibid faz uma articulação entre a educação superior, por meio dos Cursos de licenciaturas, a escola e os sistemas estaduais e municipais de ensino.

O Pibid tem como objetivo inserir o licenciando no ambiente escolar, para que, através da prática supervisionada, possa iniciar sua carreira docente. Nesta etapa de formação, o estudante de licenciatura faz a junção da teoria com prática pedagógica, ou seja, faz o uso do conhecimento construído na universidade, adequando-o à realidade escolar.

O projeto do Pibid da Uniplac, edição 2020, foi desenvolvido no período em que a Pandemia da Covid-19 afetou o Brasil e o mundo. Momento em que uma emergência sanitária mundial foi decretada pela OMS, trazendo uma nova percepção e atuação das escolas no Brasil e no mundo, modificando também a atuação dos docentes. A readaptação das aulas teve que ser implementada, visto que os estudantes não estariam presentes nas escolas. Dessa forma, as atividades aconteceram de forma remota.

Para garantir ensino aos estudantes, algumas alterações foram necessárias, como o uso de tecnologias digitais, aulas remotas ou até mesmo atividades impressas para que os

estudantes pudessem desenvolvê-las em casa. Na rede municipal onde esta experiência foi vivenciada, mesmo os materiais sendo disponibilizados virtualmente, grande parte dos estudantes retirou os materiais impressos para estudo, uma vez que não tinham acesso aos recursos digitais e a Internet.

Na grande maioria das escolas públicas, a realidade foi muito diferente do que ocorreu nas escolas particulares, principalmente no que diz respeito ao acesso às tecnologias e uso de Internet, dificultando que os estudantes continuassem os estudos mediados pelas tecnologias digitais. No entanto, apesar das dificuldades, os estudantes da Emeb Mutirão prosseguiram com os estudos e atividades escolares, com o apoio da escola e seguindo as orientações da secretaria municipal de educação, embasadas nas diretrizes nacionais.

O projeto do Pibid foi iniciado no final do ano de 2020. No início do projeto, a atuação ficou restrita a encontros virtuais, leituras e discussões sobre o assunto, por conta da pandemia e das normas sanitárias impostas naquele período. As primeiras visitas presenciais foram para reconhecimento da estrutura física da escola, observando o cotidiano escolar e quais atividades estavam sendo desenvolvidas com os estudantes, ainda de forma remota. O maior foco se deu na observação das atividades voltadas à disciplina de Matemática, nas turmas de 6º ao 9º ano do ensino fundamental.

Vale salientar que as diretrizes sanitárias foram sendo modificadas ao longo da aplicação do projeto, o que garantiu, aos poucos, que o contato com os estudantes fosse ampliado. Gradualmente, as aulas presenciais foram sendo retomadas, e o projeto oportunizou que essas diferentes experiências fossem vivenciadas diretamente na escola.

## 2 | METODOLOGIA DE PESQUISA

A metodologia utilizada foi a pesquisa qualitativa. A pesquisa qualitativa não se preocupa em quantificar dados, mas compreender, com o aprofundamento da concepção de um grupo social, de uma organização e de um fenômeno social (GERHARDT; SILVEIRA, 2009).

Esse tipo de pesquisa é mais adequado para se obter um conhecimento aprofundado de casos específicos, opiniões, percepções dos sujeitos sobre um objeto de estudo. Para a elaboração deste trabalho foram utilizadas discussões em grupos, observações no ambiente explorado e intervenções pedagógicas.

Como método de escrita do estudo foi adotado o relato de experiência. O relato de experiência permite que os pesquisados explanem a experiência vivenciada dentro de um contexto. Nessa abordagem, os pesquisadores têm a liberdade de apresentarem a vivência profissional, evidenciando as contribuições do relato para a área de estudo.

Face ao exposto, o grupo de pibidianos considerou oportuno descrever as experiências com base na percepção individual de cada bolsista, como forma de respeitar a subjetividade e as diferentes visões da realidade durante o desenvolvimento do projeto

na escola campo.

## 3 I REVISÃO DA LITERATURA

### 3.1 Pibid e a Formação do Professor

O Pibid é um programa voltado à formação inicial do professor que propicia ao acadêmico sua inserção no ambiente escolar e na prática docente. A importância desse programa nos Cursos de licenciaturas tem sido demonstrada através da oferta de novos saberes e experiências para a melhoria do ensino nas escolas públicas e a capacitação dos professores iniciantes (BRASIL, 2010).

Para Barros (2013, p. 10), o Pibid, no ambiente escolar tem-se tornado um “propiciador de saberes e práticas de ensino voltadas para reflexão-ação-reflexão” contribuindo para a aprendizagem dos estudantes.

Por intermédio do programa, os acadêmicos, docentes iniciantes das licenciaturas, têm as suas primeiras experiências como educadores, e vão se constituindo profissionais da educação, enquanto vivenciam o projeto, trocam experiências e aprendem enquanto ensinam. Afinal, o ato de ensinar não pode ser apenas um processo de transferência de conhecimento do professor ao estudante, mas uma troca, onde todos aprendem e todos ensinam.

Sobre isso, Freire (2004) traz a ideia da educação bancária, situação em que o professor doutrinador simplesmente “deposita” seu conhecimento sobre os estudantes, sem diálogo ou quaisquer tipos de interações. Freire ressalta ainda que, enquanto o objetivo da educação bancária é realizar uma segregação entre “os que sabem e os que não sabem, entre oprimidos e opressores”, uma educação de verdade, pautada na problematização e no respeito, em contrapartida, “funda-se justamente na relação dialógico-dialética entre educador e educando: ambos aprendem juntos” (FREIRE, 2004, p. 69).

Uma das premissas do Pibid é colaborar com a melhoria do ensino nas escolas públicas, com foco na construção da aprendizagem de forma dinâmica, em que se ensina ao aprender e aprende-se ensinando (FREIRE, 2001). Desta forma, estudantes de licenciatura são inseridos nas escolas, trabalhando em grupos e com o apoio do orientador da escola campo, desenvolvendo o projeto na perspectiva da interdisciplinaridade, com práxis diversificadas para, juntamente aos estudantes, construírem conhecimentos, troca de experiências e saberes.

### 3.2 Relato de Experiência nas Narrativas dos Bolsistas do PIBID

O relato de experiência tem como propósito retratar as experiências vivenciadas pelos estudantes das licenciaturas na escola campo. Portanto, neste momento passamos a escrever em primeira pessoa, pois trata-se de experiências de cunho pessoal impressas na subjetividade de cada pibidiano.

### 3.2.1 Relato da experiência na voz do Pibidiano 1

Ingressamos no projeto Pibid no final do ano de 2020, onde nossas atividades foram limitadas em leituras de artigos relacionados à educação. Realizamos leituras e conversas acerca da interdisciplinaridade, em como as disciplinas poderiam trabalhar interligadas umas com as outras. E mais que isso, como os métodos e ferramentas das diferentes disciplinas podiam contribuir umas com as outras. Tínhamos reuniões semanais para debater os artigos lidos, criando uma forma de reflexão e troca de experiências. Não podíamos entrar em sala de aula naquele momento, pois vivíamos o ano de pandemia da Covid-19, onde as aulas presenciais foram substituídas por aulas remotas e era necessário respeitar as regras da vigilância sanitária.

Acompanhamos todo processo de readaptação dentro do ambiente escolar, tanto da parte dos docentes, da direção e também dos estudantes. Notamos os medos e incertezas, os receios pela nova forma de lecionar. Entendemos que ser professor é se reinventar a todo momento, fazendo o possível para que o conhecimento seja produzido nas relações que se estabelecem por meio do diálogo entre os agentes interdiscursivos.

No ano de 2020 realizamos uma visita na Emeb Mutirão e na Emeb Nossa Senhora da Penha, onde entendemos como ficou organizada as atividades para os estudantes que não tinham acesso a Internet. Eram preparadas apostilas com conteúdos das disciplinas e exercícios, os quais deveriam ser entregues nas dependências da escola quinzenalmente, para que fossem trocados por novos.

No ano de 2021, com a retomada das aulas presenciais em grupos de revezamento, passamos a frequentar presencialmente as salas de aula na Emeb Mutirão, com todo procedimento exigido na época, por conta do Covid-19. Utilizamos com frequência álcool em gel, máscaras, mantendo o distanciamento social exigido. Notamos, logo no início do ano, crianças com um déficit de aprendizagem enorme, como se o ano anterior não tivesse existido. Assim, os professores se obrigaram a retomar as aulas fazendo uma boa revisão do conteúdo do ano anterior. Acompanhamos este processo de revisão, ajudando sempre que necessário. Começamos nesta época ministrar mini-aulas, com tema definido por nossa orientadora. Foi uma experiência incrível, ser chamado de professor, estando ali na condição de bolsista do Pibid, ministrando aula com supervisão, foi ao mesmo tempo, bastante desafiador.

Em agosto de 2021, foi decretado a volta presencial para todos os estudantes. Acompanhamos nesta fase, mais uma vez, alunos recém chegados com muitas dúvidas. Desta forma, entendemos que o ano de 2020, devido a pandemia, foi um ano de muitas injustiças sociais, com uma defasagem absurda no aprendizado, pois enquanto em alguns lugares existiam crianças na frente da tela de um computador, assistindo às aulas remotas com a utilização de Internet, em outros lugares haviam crianças perdidas, sem poder tirar

suas dúvidas de forma coerente, estudando da forma que lhe era possível. Acompanhando as atividades dos estudantes, observamos muitos trabalhos que foram entregues em branco, em razão deles permanecerem com dificuldades nos desenvolvimento dos mesmos.

Na retomada das aulas, nossa orientadora iniciou uma atividade de sequência didática. Desenvolvemos aulas lúdicas em grupo, que chamaram atenção dos estudantes. Quando um grupo de pibidianos terminava sua aula, o próximo grupo, tinha que dar sequência de onde o último parou. Foi bem interessante participar desta atividade, tínhamos que estar atentos ao que já havia sido ministrado, para na nossa vez, ministrar algo novo, mas, que não fugisse do tema.

O pibid foi uma experiência maravilhosa, construímos nossas aulas tendo apoio e orientação. Levamos conosco aprendizados que, certamente, não teríamos sem a oportunidade propiciada por este projeto. Com o Pibid, recebemos apoio, instrução e auxílio, e não recebemos o famoso “choque de iniciantes” ao adentrar em sala de aula. Pelo contrário, fomos amparados pelo Pibid, podendo aprender e ser auxiliado por nossa orientadora, de forma que sentimos segurança ao entrar em sala de aula para exercer nossa função.

### *3.2.2 Relato da experiência na voz do Pibidiano 2*

Com a pandemia da Covid-19, as escolas tiveram que se adequar e utilizar os protocolos instituídos pelo Ministério da Saúde e portarias dos governos estaduais e municipais durante os anos de 2020 e 2021. A Emeb Mutirão, manteve todos os protocolos exigidos na época, onde era necessário o uso de máscaras, álcool em gel e a aferição da temperatura para entrar na escola, além de outros cuidados como distanciamento social. Em 2020 foi dado andamento ao projeto, mas, de forma virtual, em virtude da paralisação das atividades presenciais.

No início de 2021 as aulas foram realizadas de forma alternada (presencial e remota), em agosto do mesmo ano, retornaram então, as atividades presenciais nas escolas.

Foram observadas as aulas da professora de Matemática, na escola campo, que na época tinha como formação: Licenciatura em Matemática com Especialização e Mestrado na área, nas turmas do 8º e 9º ano, período vespertino. Também foram observadas as aulas do 6º e 7º ano, período vespertino, da professora regente destas turmas, licenciada em Matemática. As professoras possuíam experiência e domínio da disciplina, o conteúdo era trabalhado com uma didática de fácil entendimento, observamos que a atenção dada aos estudantes de forma individual, propiciava melhor engajamento e entendimento nos mesmos. Neste período, devido a pandemia, as turmas foram divididas em dois grupos. Na semana que um grupo frequentava as aulas presenciais, o outro recebia materiais para que realizassem atividades de forma remota.

A turma do 8º ano era composta por aproximadamente oito alunos com idades entre

14 e 15 anos e a do 9º ano, continha 26 alunos com idades entre 15 e 16 anos. A primeira aula por nós observada, foi revisão do conteúdo Divisão e Multiplicação com vírgulas, a aula foi ministrada de forma explicativa com a participação dos estudantes. A turma do 6º ano vespertino, era composta por cinco alunos com idades entre 12 e 13 anos, já no 7º ano, haviam oito alunos com idades entre 13 e 14 anos. As aulas iniciais foram mais voltadas para revisão do conteúdo.

No segundo semestre de 2021, tivemos a experiência na prática como professores, iniciando as intervenções propriamente ditas, pois neste período, as escolas retornaram com as aulas presenciais. Realizamos em uma de nossas regências supervisionada, uma atividade sobre Propriedades da Potência, fazendo analogia sobre o conceito de área com a construção de muro de tijolos. Nesta aula participativa, os estudantes utilizaram materiais com cartolina para exemplificar o muro. No desenvolvimento do projeto na escola campo, foram realizadas diversas aulas lúdicas, que de certa forma, envolviam os estudantes, fazendo-os aprender brincando.

As intervenções foram muito importantes para aplicarmos os conhecimentos obtidos na Universidade e transformá-los na práxis, desta forma, auxiliando na construção do conhecimento dos estudantes. O Pibid nos propiciou base teórica, didática e metodológica, fundamentais para nossa formação.

### *3.2.3 Relato da experiência na voz do Pibidiano 3*

Nosso primeiro encontro no projeto Pibid, foi no dia 09 de outubro de 2020, foi realizado uma socialização com nossos colegas e com a professora orientadora, para que conhecêssemos melhor o projeto. Esse encontro foi de forma virtual, pois estávamos no auge da pandemia da covid-19. No dia 14 de outubro de 2020, fizemos um encontro de forma presencial na Universidade do Planalto Catarinense (Uniplac), foi quando conhecemos, de fato, a professora orientadora, que nos apresentou como iríamos suceder com as atividades na escola campo.

Como estávamos em período pandêmico, nossas primeiras atividades foram a leitura de alguns artigos e também a discussão de cada um deles em forma de seminário, online. Em seguida, chegou a vez de conhecermos as escolas.

Para trabalhar na perspetiva da interdisciplinaridade formamos dois grupos de estagiários, um grupo para o curso de Matemática e outro grupo do Curso de Letras. Nós, do Curso de Matemática, iríamos realizar as atividades na Emeb Mutirão, e os estudantes do curso de Letras na Emeb Suzana Albino França.

Nossa primeira visita foi na escola Mutirão, onde conhecemos a estrutura escolar, a realidade da escola e principalmente a vulnerabilidade social dos estudantes. A próxima escola que conhecemos foi a escola Nossa Senhora da Penha, observamos a estrutura, a realidade da escola e também a comunidade escolar daquele lugar. Continuamos a realizar

atividades de leitura e estudos até março de 2021, e os assuntos focados em nossas leituras foram a interdisciplinaridade e também a sequência didática, algo que iria acontecer com frequência quando fossemos para a escola campo. Algo que chamou bastante a atenção foi a escola campo, ter segurança para vigiar as crianças e também quem entrava e saia da escola. Por conta da pandemia, os alunos podiam escolher entre receber as atividades em casa ou ir presencialmente até a escola para estudar.

A primeira vez em que pisamos em uma sala de aula, como acadêmicos do curso de licenciatura, percebemos como nossa visão perante um professor mudou. Agora, acadêmicos de licenciatura, enxergamos a figura do professor, totalmente diferente do que enxergávamos enquanto apenas estudantes. Conseguimos analisar minuciosamente cada postura que a professora tomava em sala de aula, o que não deixava de ser uma visão mais técnica perante a professora.

Durante a realização da aula, vimos a importância de revisar o conteúdo anterior para depois ir para um próximo conteúdo, e também o quanto o professor tem um papel importante na interação e socialização do estudante para que ele se sinta mais à vontade na sala de aula, de tal forma que o processo de aprendizagem seja realizado com sucesso.

Diante da realidade social dos estudantes do período noturno, que eram geralmente estudantes mais velhos e com distorção de série-idade, percebemos que o professor não é apenas aquela pessoa que está ali ministrando o conteúdo, mas sim alguém que os estudantes podem considerar como amigo, alguém para desabafar e principalmente para pedir conselhos sobre determinadas situações de suas vida.

Quando iniciamos as primeiras regências, estávamos com um pouco de receio, até mesmo indecisos sobre a profissão que escolhemos, todavia neste dia, ao sermos chamados de “professor” a realidade mudou, algo começou despertar e começamos nos familiarizar com aquele ambiente, com os estudantes e com a própria sala de aula. Não existe algo mais gratificante do que ver nossos estudantes aprendendo e interagindo na matéria que explicamos. Com o decorrer do projeto, foi ficando mais fácil esse contato entre nós e os estudantes, conseguimos interagir com mais facilidade, pois estávamos nos sentindo mais à vontade.

As últimas atividades do ano de 2021 foram voltadas para aulas mais lúdicas, com gincanas, brincadeiras e atividades com materiais diferentes. Com essa experiência, percebemos o quanto é importante levar diferentes materiais para tornar a aula mais atrativa, pois os estudantes se interessam mais e também aprendem melhor.

A experiência com o Pibid foi maravilhosa, pois foi nesse programa que tivemos o nosso primeiro contato com o mundo escolar. No ano de 2021, como havíamos começado o estágio obrigatório, percebemos o quanto o Pibid nos aproximou da comunidade escolar, e contribuiu para o exercício da prática docente.

## 4 I DISCUSSÃO DOS LICENCIANDOS QUANTO ÀS VIVÊNCIAS NO PIBID

Desenvolver um projeto no interior de uma Escola, naquele momento atípico, que foi o de Pandemia da Covid-19, certamente nos trouxe uma experiência jamais vivenciada. O nosso "normal", naquele momento, não era o mais adequado, tivemos que nos reinventar completamente.

Através de aulas dinâmicas, desenvolvemos atividades lúdicas com os estudantes, levamos uma matemática diferente do que eles estavam habituados. Notamos a importância deste projeto, pois sentíamos que os estudantes adoravam as atividades propostas, participavam ativamente de maneira entusiasta. Segundo Kishimoto (1998, p. 23)

> Ao permitir a manifestação do imaginário infantil, por meio de objetos simbólicos dispostos intencionalmente, a função pedagógica subsidia o desenvolvimento integral da criança. Nesse sentido, qualquer jogo empregado pela escola, desde que respeite a natureza do ato lúdico, apresenta o caráter educativo e pode receber também a denominação geral de jogo educativo.

Quando finalizou a quarentena, na retomada das atividades presenciais, os estudantes sentiam muita dificuldade, não conseguiam acompanhar as atividades propostas pelos professores. Diante desta situação, ficamos responsáveis por realizar uma sequência didática, em que nós, pibidianos na época, fomos divididos em equipes para ministrar as aulas. Nos foram atribuídos temas a serem trabalhados com os estudantes, com atividades diferentes do que já conhecíamos nas escolas. O objetivo consistia em instigar a curiosidade dos mesmos e que as atividades fossem desenvolvidas e aprendidas na maior proporção possível.

> [...] uma atividade livre, conscientemente tomada como "não séria" e exterior à vida habitual, mas ao mesmo tempo capaz de absorver o jogador de maneira intensa e total. É uma atividade desligada de todo e qualquer interesse material, com a qual não se pode obter qualquer lucro, praticada dentro de limites espaciais e temporais próprios, segundo uma certa ordem e certas regras. (HUIZINGA, 2000, p. 16).

A sequência didática que nos foi proposta, foi algo novo para todos nós. Assumimos novas responsabilidades: de planejar as aulas de maneira criativa, ao mesmo tempo em que nos preocupávamos em trabalhar dentro da proposta de uma sequência didática. Segundo Zabala (2007), uma sequência didática é constituída por "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos" (ZABALA, 2007, p. 18). Desta forma, a sequência didática consiste em um planejamento de intervenções educativas, cuja proposta é atingir objetivos pedagógicos pré-estabelecidos, mas que não precisam ficar estritamente limitados à proposta inicial, pois podem sofrer variações de acordo com o público-alvo onde a mesma será desenvolvida.

Nesse sentido, ao planejar a próxima aula que iríamos ministrar, tínhamos que ficar a par do que já havia sido ministrado e também comunicar o grupo seguinte sobre o que

havíamos trabalhado com os estudantes, construindo ideias conectadas com um único propósito, ou seja, movimentos de uma sequência didática. Trabalhar na perspectiva da sequência didática trouxe na época, resultados positivos para os estudantes, visto que foi possível perceber notórias evoluções no processo de aprendizagem. Também aprendemos, enquanto pibidianos, o quanto esse processo é importante para o mundo docente.

## 5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

O projeto Pibid, que foi desenvolvido dentro da escola campo, com o apoio da orientadora, possibilitou a nossa inserção antecipada em sala de aula. Assim, construímos, junto aos estudantes, diversos conhecimentos, apreendemos sobre didática, contudo ética, observer e preparar aulas, experiências que foram essenciais para a nossa carreira na docência.

Notamos o quanto o projeto Pibid nos ajudou na realização do estágio obrigatório, nos deixando mais seguros para ministrar aulas, visto que, ao longo do desenvolvimento do Pibid, adquirimos maturidade e domínio em sala de aula. Se não houvesse a oportunidade de nossa participação no projeto, provavelmente nosso estágio teria sido encarado com muitas dificuldades, já que seria o nosso primeiro contato na experiência da docência.

O Pibid foi a nossa "mão na massa" nesta área da docência, foi nosso suporte de formação inicial, no processo de nossa formação como professores, que foram se construindo nas experiências da sala de aula. Levamos em nossa bagagem grandes aprendizados e vivências com nossos colegas, com os professores orientadores e também com os profissionais da escola campo.

## AGRADECIMENTOS

Agradecemos a Capes pela concessão das bolsas via Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência; a escola Emeb Mutirão e aos estudantes pela recepção e acolhimento; aos colegas pibidianos pela troca de ideias; aos professores supervisores e em especial a nossa orientadora Schayla Pissetti, por todo apoio, ajuda e ensinamento que nos propiciou em horas de dificuldades e anseios, seremos eternamente gratos.

## REFERÊNCIAS

AGUIAR, Severina Bezerra da Silva Melo. **A Ludicidade Infantil. Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento.** Ano 02, Vol. 01. pp 495-507, Abril de 2017. ISSN:2448-0959

ALMEIDA, M.G.O. Sabino, J.D. Barbosa, L.R.R. Guedes, M.G.M. **Construções de Sequências Didáticas com Base no Acervo das Obras Complementares.** Site: http://www.abq.org.br/simpequi/2015/trabalhos/90/6995-20435.html#:~:text=A%20sequ%C3%AAncia%20did%C3%A1tica%20%C3%A9%20um,%E2%80%9D%20(Zabala%201998%2C%20p.

BARROS, E. N. ; Souza, E. J. S. ; MACEDO, Marly **. Pibid x Escola pública**: uma parceria na melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem das séries iniciais do ensino fundamental. In: V Fórum Internacional de Pedagogia V FIPED, 2013, Vitória da Conquista BA.

BRASIL. Decreto nº 7.219, de 24 de junho de 2010. **Dispõe sobre o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência PIBID e dá outras providências**. Brasília, DF, jun. 2010. Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2010/decreto/d7219.htm Acesso em 23 março de 2020.

CAMPOS, A. L. A.; MARTINS, J. M.;OLIVEIRA, A. D.; PARASMO, M. C. A. **A Interdisciplinaridade segundo Edgar Morin e Alzira Lobo de Arruda Campos.** URL: www.italo.com.br/portal/cepep/revista eletrônica.html. São Paulo SP, v.10, n.2, p. 93-107, abr/2018.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: paz e terra, 2001.

FREIRE, Paulo. **Entrevista com Paulo Freire**: a educação neste fim de século. In M. Gadotti, Convite à leitura de Paulo Freire. 2004. São Paulo: Scipione.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo (org.). **Métodos de Pesquisa.** Porto Alegre: Editora da Ufrgs, 2009. 120 p.

PERETTI, Lisiane.  TONIN DA COSTA, Gisele Maria. **Sequência didática na matemática.** Disponível em: <https://www.bage.ideau.com.br/wpcontent/files_mf/7ff08743d52102854eaaf22c19c48637311.pdf>. Acesso em 15 Jan. 2022

ROMERA, Liana. RUSSO, Cristina. BUENO, Regiane E. PADOVANI, Adriana. SILVA, Ana Paula C. SILVA, Camila R. BINI, Gisele de Abreu Íris. CAMPOS, Priscila B. SILVA, Patrícia Duarte. **O lúdico no processo pedagógico da educação infantil: importante, porém ausente.** Disponível em: <file:///C:/Users/Admin/Downloads/3550-12146-1-PB%20(1).pdf>. Acesso em 24 Jan. 2022

TREVISAN. Karina, ROMERA. Liana Abraão. **O Elemento Lúdico.** Revista Corpoconsciência, Santo André, vol. 14, n. 2, p. 20-29, jul/dez 2010.

## CAPÍTULO 4

# CUSTO MÍNIMO DE ENERGIA NO TRANSPORTE DE SENSORES EM UMA REDE BICOLOR VIA PROCESSOS DE POISSON DISTINTOS

*Data de submissão: 19/09/2023* *Data de aceite: 02/10/2023*

**Adolfo Manoel Dias da Silva**
Department of Statistics, University of Brasília, Brasília, Brazil
Department of Statistics, University of Brasília, Brasília, Brazil

**Cira E Guevara Otiniano**
Department of Statistics, University of Brasília, Brasília, Brazil

**RESUMO:** Neste trabalho, obtemos uma fórmula fechada para a distância esperada entre eventos de dois Processos de Poisson independentes com tempos de chegada $X_1$, $X_2$, . . . e $Y_1$, $Y_2$, . . . e, respectivas, taxas de chegada $\lambda_1$ e $\lambda_2$. Como consequˆencia, encontramos um intervalo para o custo mínimo esperado de energia no transporte de sensores em uma rede bicolor. Ilustrações gráficas do nossos resultados também foram adicionados.

**PALAVRAS-CHAVE:** Processo de Poisson · Sensor · custo · .

## 1 I INTRODUÇÃO

Os sensores móveis são usados em monitoramento e comunicação de dados para diversos fins, como pesquisa oceanográfica, navegação aérea, segurança, redes sem fio e infraestruturas complexas, entre outros. Um dos assuntos de pesquisa nesta área é a determinação de uma alocação ótima dos sensores com o objetivo de gerar uma cobertura a um custo mínimo. Com o desenvolvimento de tecnologia de sensor móvel, uma boa cobertura pode ser obtida movimentando os sensores móveis para as posições desejadas. Porém, o sensor móvel é geralmente equipado com bateria e o gasto de energia é muito maior durante o movimento do sensor do que em sua função de detecção. Portanto, é importante minimizar os movimentos do sensor para prolongar sua vida útil e manter a confiabilidade da rede a qual pertence. Existem duas abordagens para estudar o Custo Mínimo Esperado de Transporte: a soma ou o máximo dos movimentos dos sensores de suas posições iniciais em direção aos destinos alvo. Ajtai et al.(1984) consideram 2n sensores, n azuis e n vermelhos, distribuídos independentemente e uniformemente

em um quadrado unitário e demonstraram que o Custo Mínimo Esperado de Transporte, denotado por $T_n$ e definido por $T_n := \min_\pi \sum_{i=1}^{n} d(X_{\pi(i)}, Y_i)$, está em um intervalo. Kranakis (2014) estudou o Custo Mínimo Esperado de Transporte segundo a abordagem da soma de movimentos de sensores de suas posições iniciais em direção às posições finais. Considerou que os sensores movimentam-se aleatoriamente sobre uma reta de acordo com um processo de Poisson e encontrou uma fórmula analítica fechada, em função de polinˆomio de Pochhammer, para a distância esperada entre eventos de dois processos de Poisson com respectivos tempos de chegada $X_1$, $X_2$,  e $Y_1$, $Y_2$  e, taxas de chegada iguais a λ.  Com isso foi possivel determinar o intervalo para o Custo Mínimo Esperado de Transporte. Recentemente, Kapelko (2017), ao considerar dois processos aleatórios gerais idˆenticos e independentes, determinou a diferença absoluta esperada para todos os expoentes $b > 0$. Desse modo, ele soluciona outro problema em aberto deixado por Kapelko (2015).  Sua principal contribuição foi encontrar fórmulas assintóticas para os momentos sem uso de qualquer função de densidade específica.  Nessa abordagem, os resultados são válidos para uma ampla classe de distribuições. Em todos os trabalhos mencionados acima, para o cálculo do Custo Mínimo Esperado de Transporte, assume-se que os sensores se movimentam conforme dois processos estocásticos independentes e com a mesma distribuição (i.i.d). Porém, ao considerar dois processos estocásticos para o movimento dos sensores, é mais natural assumir que os processos não necessariamente possuem a mesma distribuição.  O objetivo deste trabalho é determinar o Custo Mínimo Esperado de Transporte para o movimento de sensores que ocorre conforme dois processos de Poisson com taxas $\lambda_1$ e $\lambda_2$ (não necessariamente iguais) e tempos de chegadas $X_1, X_2, \cdots, X_n$ e $Y_1$, $Y_2$,  , $Y_n$, respectivamente.

Nossa metodologia difere da utilizada por Kranakis (2014) e Kapelko (2017), pois eles se baseiam somente em resultados da teoria combinatória, porém aqui utilizamos também resultados das funções especiais gama, gama incompleta superior e inferior definidas, respectivamente, por

$$\Gamma(a) := \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt, \tag{1.1}$$

$$\Gamma(a, x) := \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt, \tag{1.2}$$

e

$$\gamma(a, x) := \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt. \tag{1.3}$$

Desta forma, primeiro apresentamos o resultado da distância esperada entre os tempos $X_1, X_2, \cdots$ e $Y_1$, $Y_2$,  relativos a aos processos de Poisson independentes com respectivas taxas $\lambda_1$ e $\lambda_2$, em seguida mostramos os resultados obtidos para o custo mínimo esperado de transporte na alocação de sensores cujos os movimentos ocorrem conforme esses dois processos. Finalmente, apresentamos ilustrações gráficas de nossos resultados

geradas a partir de simulações dos processos através da programa computacional R.

## 2 | DISTÂNCIA ESPERADA

Sejam $X_i$, $Y_k$ variaveis aleatórias que representam o $i$-ésimo e $k$-ésimo tempos de chegadas de dois processos de poisson independentes com taxas $\lambda_1$ e $\lambda_2$. Então

$$X_i \sim Gama(i, \lambda_1) \quad \text{e} \quad Y_k \sim Gama(k, \lambda_2)$$

cujas funções de densidade de probabilidade são, respectivamente,

$$f_{X_i}(x) := f_1(x) = \frac{\lambda_1^i}{\Gamma(i)} x^{i-1} e^{-\lambda_1 x} \qquad x > 0 \tag{2.1}$$

e

$$f_{Y_k}(x) := f_2(y) = \frac{\lambda_2^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda_2 y} \qquad y > 0, \tag{2.2}$$

**Teorema** Considere dois processos de Poisson independentes com taxas de chegada $\lambda_1$ e $\lambda_2$, cujos tempos de chegadas sao, respectivamente, $X_1, X_2, \cdots$ e $Y_1, Y_2, \cdots$ . Então, a identidade

$$E|X_{k+r} - Y_k| = \frac{k+r}{\lambda_1} - \frac{k}{\lambda_2} + 2k(k+r)\binom{2k+r}{k}\left[\frac{B_x(k+r, k+1)}{\lambda_2} - \frac{B_x(k+r+1, k)}{\lambda_1}\right] \tag{2.3}$$

é válida para $r \geq 0$, $k \geq 1$ inteiros e $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

***Prova*** Pela teoria de distribuição condicional, utilizando a hipótese de que os processos são independentes, temos que

$$\begin{aligned} E(|X_i - Y_k|) &= E[E(|X_i - Y_k| \mid Y_k)] \\ &= \int_0^\infty E(|X_i - Y_k| \mid Y_k = y) f_2(y)\, dy \\ &= \int_0^\infty E(|X_i - y|) f_2(y)\, dy. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Além disso

$$E(|X_i - y|) = \int_0^y -(x-y) f_1(x)\, dx + \int_y^\infty (x-y) f_1(x)\, dx. \tag{2.5}$$

Sejam $I_1 = \int_0^y -(x-y) f_1(x)\, dx$ e $I_2 = \int_y^\infty (x-y) f_1(x)\, dx$. No cálculo de $I_1$ e $I_2$ utiliza-se a densidade de probabilidade (2.1) e algumas manipulações algébricas mostradas abaixo

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^y -(x-y) f_1(x)\, dx \\ &= \int_0^y -x f_1(x)\, dx + y \int_0^y f_1(x)\, dx \end{aligned}$$

$$= \int_y^\infty x f_1(x)\, dx - \int_0^\infty x f_1(x)\, dx + y \int_0^y f_1(x)\, dx$$

$$= \frac{\lambda_1^i}{\Gamma(i)} \int_y^\infty x^i e^{-\lambda_1 x}\, dx - \frac{i}{\lambda_1} + \frac{y\lambda_1^i}{\Gamma(i)} \int_0^y x^{i-1} e^{-\lambda_1 x}\, dx \tag{2.6}$$

e

$$I_2 = \int_y^\infty (x-y) f_1(x)\, dx$$

$$= \frac{\lambda_1^i}{\Gamma(i)} \int_y^\infty x^i e^{-\lambda_1 x}\, dx - \frac{y\lambda_1^i}{\Gamma(i)} \int_y^\infty x^{i-1} e^{-\lambda_1 x}\, dx. \tag{2.7}$$

Substituindo (2.6) e (2.7) em (2.5) e em seguida ao aplicar as funções gama superior e gama inferior, obtem-se

$$E\big(|X_i - y|\big) = \frac{2\lambda_1^i}{\Gamma(i)} \int_y^\infty x^i e^{\lambda_1 x}\, dx - \frac{i}{\lambda_1} + \frac{y\lambda_1^i}{\Gamma(i)} \Big( \int_0^y x^{i-1} e^{-\lambda_1 x}\, dx - \int_y^\infty x^{i-1} e^{-\lambda_1 x}\, dx \Big)$$

$$= \frac{2}{\lambda_1 \Gamma(i)} \Gamma(i+1, \lambda_1 y) - \frac{i}{\lambda_1} + \frac{y}{\Gamma(i)} \Big( \gamma(i, \lambda_1 y) - \Gamma(i, \lambda_1 y) \Big). \tag{2.8}$$

Aplicando (2.8) em (2.4), segue que

$$E\big(|X_i - Y_k|\big) = \int_0^\infty E\big(|X_i - y|\big) f_2(y)\, dy$$

$$= \int_0^\infty \left[ \frac{2}{\lambda_1 \Gamma(i)} \Gamma(i+1, \lambda_1 y) - \frac{i}{\lambda_1} + \frac{y}{\Gamma(i)} \Big( \gamma(i, \lambda_1 y) - \Gamma(i, \lambda_1 y) \Big) \right] f_2(y)\, dy$$

$$= -\frac{i}{\lambda_1} + \frac{2}{\lambda_1 \Gamma(i)} \underbrace{\int_0^\infty \Gamma(i+1, \lambda_1 y) f_2(y) dy}_{J_1} + \frac{1}{\Gamma(i)} \underbrace{\Big( \int_0^\infty y \gamma(i, \lambda_1 y) f_2(y) dy \Big)}_{J_2}$$

$$- \frac{1}{\Gamma(i)} \underbrace{\Big( \int_0^\infty y \Gamma(i, \lambda_1 y) f_2(y) dy \Big)}_{J_3}. \tag{2.9}$$

A prova finaliza ao calcular as integrais $J_1$, $J_2$ e $J_3$, em que

$$J_1 := \int_0^\infty \Gamma(i+1, \lambda_1 y) f_2(y) dy;\ J_2 := \int_0^\infty y \gamma(i, \lambda_1 y) f_2(y) dy \ e\ J_3 := \int_0^\infty y \Gamma(i, \lambda_1 y) f_2(y) dy.$$

Para o cálculo de $J_1$ basta usar as funções Gamma e Gamma superior definidas em (1.1) (1.2). Assim

$$
\begin{aligned}
J_1 &:= \int_0^\infty \Gamma(i+1, \lambda_1 y) f_2(y) dy \\
&= \frac{i!\lambda_2^k}{\Gamma(k)} \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y} \sum_{s=0}^{i} \frac{(\lambda_1 y)^s}{s!} y^{k-1} dy \\
&= \frac{i!\lambda_2^k}{\Gamma(k)} \sum_{s=0}^{i} \left( \frac{\lambda_1^s}{s!} \int_0^\infty y^{k+s-1} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y} dy \right) \\
&= \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(k)} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \right)^k \sum_{s=0}^{i} \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \right)^s \frac{\Gamma(s+k)}{s!} \right]. \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

Para calcular $J_2$ e $J_3$, usam-se as equações (1.2), (1.3) e a função de densidade (2.2):

$$
\begin{aligned}
J_2 &:= \int_0^\infty y\gamma(i, \lambda_1 y) f_2(y) dy \\
&= \int_0^\infty y(i-1)! \left( 1 - e^{-\lambda_1 y} \sum_{s=0}^{i-1} \frac{(\lambda_1 y)^s}{s!} \right) f_2(y) dy \\
&= (i-1)! \int_0^\infty y f_2(y)\, dy - (i-1)! \frac{\lambda_2^k}{\Gamma(k)} \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y} \sum_{s=0}^{i-1} \frac{(\lambda_1 y)^s}{s!} y^k \, dy \\
&= \frac{\Gamma(i)k}{\lambda_2} - \frac{\Gamma(i)}{\lambda_2 \Gamma(k)} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \right)^{k+1} \sum_{s=0}^{i-1} \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \right)^s \frac{\Gamma(s+k+1)}{s!} \right]. \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
J_3 &:= \int_0^\infty y\Gamma(i, \lambda_1 y) f_2(y) dy \\
&= \frac{(i-1)!\lambda_2^k}{\Gamma(k)} \sum_{s=0}^{i-1} \left( \frac{\lambda_1^s}{s!} \int_0^\infty y^{k+s} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)y} dy \right) \\
&= \frac{\Gamma(i)}{\lambda_2 \Gamma(k)} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \right)^{k+1} \sum_{s=0}^{i-1} \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \right)^s \frac{\Gamma(s+k+1)}{s!} \right]. \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

Logo, substituindo os resultados de (2.10), (2.11) e (2.12) em (2.9), resulta em:

$$
\begin{aligned}
E|X_i - Y_k| = \frac{k}{\lambda_2} - \frac{i}{\lambda_1} &+ \frac{2i}{\lambda_1 \Gamma(k)} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \right)^k \sum_{s=0}^{i} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \right)^s \frac{\Gamma(s+k)}{s!} \\
&- \frac{1}{\lambda_2 \Gamma(k)} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \right)^{k+1} \sum_{s=0}^{i-1} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \right)^s \frac{\Gamma(s+k+1)}{s!}. \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

A expressao (2.13) equivale ao resultado (2.3), quando se considera a relação de coeficientes binomias, abaixo, com a distribuição beta incompleta, dada em Didonato (1966),

$$\sum_{s=0}^{L}\binom{n+s}{s}x^s = \frac{1-(L+1)\binom{L+n+1}{n}B_x(L+1,n+1)}{(1-x)^{n+1}}, \tag{2.14}$$

em que $B_x(a, b)$ denota a função beta incompleta, definida por

$$B_x(a,b) = \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt.$$

## 3 I CUSTO MÍNIMO ESPERADO DE TRANSPORTE

Aqui é definida e obtido um intervalo para o custo mínimo esperado de transporte da máxima combinação bicolor aleatória de um sensor.

Considere $X_1, X_2, \cdots X_n$ e $Y_1, Y_2, \cdots Y_n$ como sendo os $n$ primeiros tempos de chegada de dois processos de Poisson com taxas de chegada, respectivamente, $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$. Além disso, considere que os sensores são colocados aleatoriamente na semi-reta $[0, \infty)$. A $k$-ésima posição do sensor na cor amarela é determinada pelo seu tempo de chegada $X_k$ e a $k$-ésima posição do sensor na cor vermelha é determinada pelo seu tempo de chegada $Y_k$. O custo mínimo esperado de transporte do censor em uma rede bicolor é dado por

$$C_{opt}(\lambda, n) = \sum_{k=1}^{n} E|X_k - Y_k|. \tag{3.1}$$

**Teorema 2.** Considere dois processos de Poisson com taxas $\lambda_1$ e $\lambda_2$, com $\lambda_1 \geq \lambda_2$, e respectivos tempos de chegadas $X_1, X_2, \cdots$ e $Y_1, Y_2, \cdots$ . Então,

$$C_{opt}(\lambda, n) \in [\; l_n \;,\; s_n \;], \tag{3.2}$$

em que

$$l_n = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) + \frac{2}{\lambda_2} \times S(n, \lambda_1, \lambda_2), \tag{3.3}$$

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) + \left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1}\right) \times S(n, \lambda_1, \lambda_2), \tag{3.4}$$

e

$$S(n, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(xx')^k}{B(k+1,k)} \quad \text{com} \quad x = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad \text{e} \quad x' = 1 - x. \tag{3.5}$$

***Prova.*** Para obter a primeira desigualdade, utiliza-se a indentidade (ver Didonato (1966)

$$I_x(a,b) = I_x(a-1,b+1) - \frac{x^{a-1}x'^b}{bB(a,b)} \tag{3.6}$$

na equaçao (2.3) do Teorema 1. Assim, quando $a = k + 1$ e $b = k$ e $r = 0$ a esperaça da diferença se transforma em

$$E|X_k - Y_k| = \frac{k}{\lambda_1} - \frac{k}{\lambda_2} + 2k\left[\frac{I_x(k, k+1)}{\lambda_2} - \frac{I_x(k+1, k)}{\lambda_1}\right]. \tag{3.7}$$

De (3.7), quando $\lambda_1 \geq \lambda_2$, se tem que o limite inferior do custo esperado é a expressaõ da direita da desigualdade

$$C_{opt}(\lambda, n) \geq \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) + \frac{2}{\lambda_2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(xx')^k}{B(k+1, k)}. \tag{3.8}$$

Por outro lado, as identidades

$$I_x(a, b) = I_x(a, b+1) - \frac{x^a {x'}^b}{bB(a, b)} \tag{3.9}$$

e

$$I_x(a, b) = I_x(a+1, b) + \frac{x^a {x'}^b}{aB(a, b)} \tag{3.10}$$

permitem mostrar que

$$C_{opt}(\lambda, n) \leq \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) + \left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{(xx')^k}{B(k+1, k)}. \tag{3.11}$$

O resultado (3.2) sai diretamente das desigualdades (3.8) e (3.11).

**Corolário 1.** Considere dois processos de Poisson com taxas $\lambda_1$ e $\lambda_2$, e respectivos tempos de chegadas $X_1, X_2, \cdots$ e $Y_1, Y_2, \cdots$. Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, então

$$C_{opt}(\lambda, n) = \frac{2n}{3\lambda}\binom{n+\frac{1}{2}}{n}. \tag{3.12}$$

***Prova.*** Do Teorema 2, tem-se que

$$\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) + \frac{2}{\lambda_2} \times S, \lambda_1, \lambda_2) \leq C_{opt}(\lambda, n) \leq \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) + \left(\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1}\right) \times S,$$

com

$$S = S(n, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(xx')^k}{B(k+1, k)}.$$

Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, a inequação fica simplificada em

$$\frac{2}{\lambda} \times S(n, \lambda) \;\leq\; C_{opt}(\lambda, n) \;\leq\; \frac{2}{\lambda} \times S(n, \lambda)\,. \tag{3.13}$$

Isto é, de (3.13), tem-se que

$$
\begin{aligned}
C_{opt}(\lambda, n) &= \frac{2}{\lambda} \times S(n, \lambda) \\
&= \frac{2}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} k 2^{-2k} \binom{2k}{k}.
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

Consequentemente, pela Eq.(3.14), segue o resultado. O Corolário 1 é um dos principais resultados de Kapelko (2017).

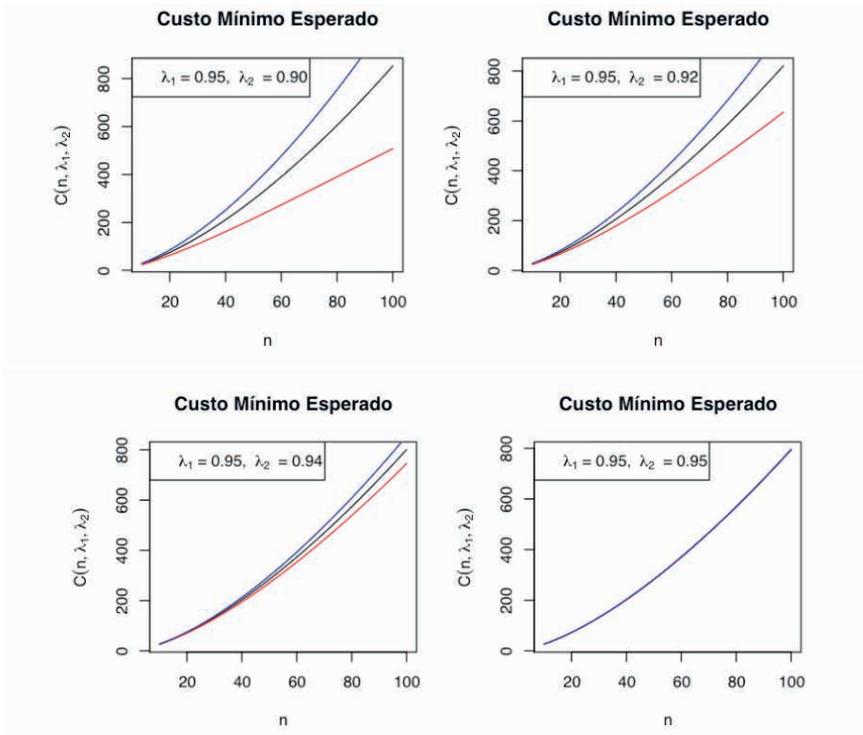



Figure 1: Gráficos referentes ao Custo Mínimo Esperado de Transporte, $C_{opt}$, e ao seu intervalo; Vermelho: Limite Inferior; Azul: Limite Superior.

## 3.1 Gráficos do Custo (3.1)

A Figura 3.1 ilustra que o resultado do Teorema 2 é consistente, pois a medida que as taxas dos processos de Poisson se aproximan o custo assume o valor do Corolário 1 que também foi encontrado por Kapelko (2017).

A construção gráfica foi relizada a linguagem computacional R.

## REFERENCES


Ajtai, M., J. Komlós, G. Tusnády (1984). On optimal matchings. Combinatorica, 44: 259–264. DiDonato, A. e M. Jarnagin (1966). A method for computing the incomplete beta function ratio.

Revised. Rel. tecn. U. S. Naval Weapons Laboratory Dahlgren, Virginia.

Kapelko, R. (2017). On the expected moments between two identical random processes with application to sensor network. arXiv preprint arXiv:1705.08855.

Kapelko, R. (2015). The weighted event distance of Poisson processes. arXiv:1507.01048, Kranakis, E. (2014). On the event distance of Poisson processes with applications to sensors. Discrete

Applied Mathematics 179, pp. 152–162.

R Core Team (2022). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.

# O ENSINO DE PROBABILIDADE MEDIADO POR MATERIAIS MANIPULÁVEIS: EXPERIÊNCIAS FORMATIVAS

*Data de submissão: 09/08/2023* *Data de aceite: 02/10/2023*

**Daniel Cleberson da Conceição Rocha**
Professor da Escola EEMTI Ana Noronha.
Parambu, Ceará.
https://lattes.cnpq.br/9809003870671086

**Maria Cezar de Sousa**
Professora na Universidade Federal do Piauí.
Picos,Piauí.
http://lattes.cnpq.br/5236899475162522

**Cristiana Barra Texeira**
Professora na Universidade Federal do Piauí.
Picos, Piauí.
http://lattes.cnpq.br/7948316349298566

**Gildon César de Oliveira**
Professor do Instituto Federal do Piauí.
Floriano, Piauí.
http://lattes.cnpq.br/6891454530144042

**Guilherme Luiz de Oliveira Neto**
Professor do Instituto Federal do Piauí.
Floriano, Piauí.
http://lattes.cnpq.br/4503582575680165

**Josiel de Sousa Costa**
Professor da Escola Municipal Claro Lima
Francisco Ayres, Piauí
http://lattes.cnpq.br/6137389087860000

**RESUMO:** Essa pesquisa teve o objetivo de analisar o uso de materiais manipuláveis para o aprendizado de probabilidade com os estudantes do 2° ano do Ensino Médio da rede pública de ensino da cidade de Parambu-CE, buscando respostas para a seguinte questão: O Ensino de probabilidade com o uso de materiais manipuláveis pode trazer melhores resultados de aprendizagem para os alunos do 2° ano do Ensino Médio? e como objetivos específicos: verificar os conhecimentos dos alunos sobre o assunto de probabilidade; conhecer materiais didáticos e trabalhos semelhantes disponíveis na literatura para o ensino de probabilidade e verificar o conhecimento dos alunos sobre probabilidade após a intervenção educativa realizada. O presente trabalho constituiu-se numa pesquisa de campo, do tipo pesquisa-ação colaborativa com uma abordagem quanti qualitativa. A pesquisa foi dividida em três momentos: aplicação de um pré-teste, em seguida foi realizada quatro oficinas e uma palestra com ênfase na intervenção, abordando a temática e por último aplicação de um pós-teste. Os dados foram coletados através de diário de bordo, fotos, depoimentos dos alunos sobre a compreensão do conteúdo e questionários aplicados com os educandos.

Os procedimentos para análise dos dados tiveram como base a fundamentação teórica sobre a temática, bem como a análise de conteúdo. Os resultados mostraram que no pré-teste os educandos tiveram 25% de acertos, já no pós-teste os alunos passaram para 78% de acertos, mostrando que os educandos pesquisados conseguiram um crescimento percentual de 212%, após a realização das oficinas pedagógicas com uso de materiais manipuláveis, utilizando as estratégias de jogos e resolução de problemas.Dessa forma, concluímos a validade do uso de recursos manipuláveis, jogos e a resolução de problemas no ensino de probabilidade.
**PALAVRAS-CHAVE:** Jogos. Materiais Manipuláveis. Probabilidade.

## PROBABILITY TEACHING MEDIATED BY MANIPULABLE DIDACTIC MATERIALS:TRAINING EXPERIENCES

**ABSTRACT**: This research aimed to analyze the use of manipulable materials for learning probability with 2nd year high school students from the public school network in the city of Parambu-CE, seeking answers to the following question: Teaching probability with the use of manipulable didactic materials can bring better learning results for students of the 2nd year of high school? And as specific objectives: to verify the students' knowledge on the subject of probability; to know didactic materials and similar works available in the literature for teaching probability; build / select teaching materials for teaching probability and verify students' knowledge of probability after an educational intervention. The present work constitutes a field research, of the collaborative action-research type with a quanti-qualitative approach. The research was divided into three moments: application of a pre-test, then four workshops and a lecture with an emphasis on intervention, addressing the theme and finally application of a post-test. Data were collected through a logbook, photos, students' testimonies about understanding the content and questionnaires applied to the students. The procedures for data analysis were based on the theoretical foundation on the subject. The results showed that in the pre-test the students had 25% of correct answers, in the post-test the students reached 78% of correct answers, showing that the students surveyed achieved a percentage growth of 212%, after carrying out the pedagogical workshops with use of manipulable materials, using game strategies and problem solving.
**KEYWORDS:** Games. Manipulable Didactic Materials. Probability.

## 1 I INTRODUÇÃO

Considerando os discursos de que a matemática é uma ciência complexa e que boa parte dos alunos a rejeita antes mesmo de estudá-la e que determinados conteúdos de matemática requerem mais estudos discernimento que outros, como o caso do estudo sobre probabilidade que exige do aluno um raciocínio mais abrangente, pois determinados tópicos para serem compreendidos necessitam de vários conceitos diferentes numa única aplicação, resolvemos adentrar a essa discussão investigando elementos que poderão facilitar o acesso a esse conhecimento.

O nosso interesse nesse trabalho consiste em verificar se o uso de materiais

didáticos manipuláveis contribui para a melhor aprendizagem no ensino de probabilidade, verificando na literatura quais as estratégias utilizadas na explanação do conteúdo, quais os materiais que auxiliam a compreensão de probabilidade no ensino médio.

Ensinar probabilidade com êxito, constitui-se um desafio e nessa perspectiva, ressaltamos Paulo Freire (2001), quando afirma que ensinar não é transferir conhecimentos, mas criar possibilidades para sua produção ou sua construção. Dessa forma, ponderamos o contexto de ensino que por muito tempo vem passando por transformações, onde o professor deixa de ser o único que detém o conhecimento e passou a lograr êxito as possibilidades de construir o conhecimento junto com os educandos.

Por conseguinte, ao refletir sobre as dificuldades que os professores de matemática encontram para ministrar os conteúdos de matemática, esse trabalho buscou respostas para a seguinte questão: O Ensino de probabilidade com o uso de materiais didáticos manipuláveis pode trazer melhores resultados de aprendizagem para os alunos do 2° ano do Ensino Médio? Teve como objetivo geral: Analisar as contribuições do uso de materiais didáticos manipuláveis, para a aprendizagem de probabilidade com os estudantes do 2° ano do Ensino Médio em uma escola pública na cidade de Parambu-CE e como objetivos específicos: verificar os conhecimentos dos alunos sobre o assunto de probabilidade; conhecer materiais didáticos e trabalhos semelhantes disponíveis na literatura para o ensino de probabilidade e verificar o conhecimento dos alunos sobre probabilidade após a intervenção educativa realizada.

O trabalho consistiu numa pesquisa de campo, do tipo pesquisa-ação colaborativa com uma abordagem qualitativa. A pesquisa foi dividida em três momentos: aplicação de um teste diagnóstico da realidade, em seguida realizamos as oficinas de ensino abordando a temática e por último aplicação de um teste final. Os dados foram coletados através de diários de bordo, fotos, e questionários aplicados com os participantes. Os procedimentos para análise dos dados tiveram como base a fundamentação teórica sobre a temática, bem como a análise de conteúdo.

O Presente relato está organizado com uma introdução, um refencial teórico em que abordamos: Probabilidade: desafios e metodologias de ensino; alternativas para ensinar probabilidade na educação básica; jogos no processo de ensino de matemática uma ferramenta para estimular aquisição do conhecimento; a resolução de problemas como estratégia para ensinar probabilidade; metodologia ; o campo da pesquisa; oficinas pedagógicas; descrição dos jogos e materiais manipuláveis utilizados nas oficinas; sistematização e realização das oficinas; considerações finais seguido das referências.

## 2 | PROBABILIDADE: DESAFIOS E METODOLOGIAS DE ENSINO

A probabilidade proporciona uma maneira de medir a incerteza e mostrar aos educandos como a matemática pode auxiliar nas tomadas de decisões, aplicando os

métodos para resolver problemas do dia-a-dia. Com isso, ensinar as noções de probabilidade usando uma metodologia simples que ajuda a encontrar respostas adequadas.

É importante que ensinemos aos alunos da escola básica os conceitos de probabilidade de maneira que o educando desperte seu raciocino lógico, e consiga distinguir graus de incertezas das suas tomadas de decisões diante de um evento probabilístico.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais estabelecem que a principal finalidade para o estudo de probabilidade deve favorecer que:

> [...] o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (BRASIL, 1997, p. 56).

Dessa forma a probabilidade desperta no aluno formas de pensamentos, envolvendo fenômenos aleatórios, e atitudes que possibilitam o posicionamento crítico, a fazer previsões e conseguir tomar decisões de forma inteligente tendo consequências de sua escolha. Uso de materiais manipuláveis

## 2.1 Alternativas para ensinar probabilidade na educação básica:

Sabendo da importância para a formação do educando, é preciso manter o foco e os esforços em estratégias para que o aluno saiba coletar, organizar, interpretar e comparar os dados para obter e fundamentar conclusões (LOPES, 2008, p.61). O professor precisa ter estratégias para que suas aulas motivem a turma a aprender o conteúdo de matemática. Apresentamos três estratégias de ensino: Uso de materiais manipuláveis, Jogos no processo de ensino e a Resolução de problemas como estratégias para ensinar matemática.

### *2.1.1 Uso de materiais manipuláveis*

Considerando a relevância do protagonismo dos educandos, buscamos conhecer estratégias de ensino que valorizem a construção do conhecimento e nos deparamos com o uso de materiais facilitadores e destacamos os materiais concretos e /ou manipuláveis. Para Hole (1977), o uso de material concreto auxilia no processo de ensino e aprendizagem e podem ser divididos em três categorias, materiais didáticos, materiais estruturados e materiais não estruturados.

Materiais didáticos são definidos por meio de aprendizagem e ensino, materiais estruturados representa uma coleção de objetos, configurados de maneira a manter uma estrutura lógica, incluindo os jogos e os modelos demonstrativos, já os materiais não estruturados são os materiais que não se encaixam nas duas categorias anteriores. Ou seja, segundo Hole (1977), esses são materiais que não foram produzidos para ter ideias e estruturas matemáticas.

Segundo a classificação dos materiais concretos temos os estruturados que inclui

os jogos. O uso de jogos no ensino pode ser considerado como um modelo de material estruturado e Ribeiro (1995) o define como material manipulável aquele que possui ao menos uma finalidade educativa. Dessa forma, pode-se atribuir a concepção de que os jogos possuem ideias matemáticas definidas e que o uso destes em sala de aula representa possibilidades para a problematização de conceitos matemáticos contribuindo para uma produção significativa nas aulas de matemática (LUVISON; SANTOS, 2013)

O uso de material manipulável no ensino de matemática influencia na aprendizagem dos alunos, os educandos mostram mais interesse diante do conteúdo abordado, dessa forma saímos um pouco do modo tradicional onde o professor utiliza quadro e pincel para explanar os tópicos de matemática (MOURA, 2001).

Quando o professor adota uma postura alternativa nas suas aulas trazendo mecanismos diferentes para ensino de matemática, ele não só desperta a atenção dos educandos, mas transforma a sala de aula em um ambiente de aprendizagem significativo, onde o aluno passa a ser parte do processo de ensino e aprendizagem.

Se o professor utilizar novas estratégias de ensino, utilizando recursos didáticos, ele apresenta ao educando novas formas de visualizar a matemática, mostrando que a matemática não é uma disciplina de regras e fórmulas prontas e pode ser aplicada no seu cotidiano. Uma vez que:

> Muitas vezes, os professores de matemática e mesmo os livros didáticos indicam uma nova unidade pela etapa da representação: em primeiro lugar, vem a definição (representação formal do conceito); depois, alguns exemplos; a seguir situações práticas em que se pode aplicar aquele conceito. Esse, acreditamos, é um dos grandes motivos pelos quais os alunos mesmo os de cursos do nível médio, acham que matemática é uma disciplina em que se devem decorar algumas regras e aplicá-las em situações de sala de aula, e que nada tem a ver com a vida prática (TOLEDO e TOLEDO, 1997, p.37).

Durante o processo de ensino e aprendizagem os educadores precisam fazer pontes entre o conteúdo ministrado em sala de aula com a realidade dos educandos dessa maneira os alunos vão criar os primeiros laços entre o conteúdo visto em sala de aula com suas realidades. Outra estratégia apresentada consiste na utilização de jogos, que discutiremos na sequência.

### *2.1.2 Jogos no processo de ensino de matemática: uma ferramenta para estimular aquisição do conhecimento*

Diante da proposta de uso de material concreto para ensinar matemática, temos uma outra importante ferramenta que são os jogos que se encontram cada vez mais presentes nas salas de aula. Os jogos em sala de aula além de ser uma ferramenta de ensino servem como um recurso de motivação para os alunos e consideramos que:

> A motivação é fator fundamental da aprendizagem. Sem motivação não há aprendizagem. Pode ocorrer aprendizagem sem professor, sem livro, sem

> escola e sem uma porção de outros recursos. Mas mesmo que existam todos esses recursos favoráveis, se não houver motivação, não haverá aprendizagem (PILETTI, 1985, 42).

O professor precisa motivar seus alunos, respeitando suas limitações e os conhecimentos prévios sobre o conteúdo abordado em sala de aula, dessa forma o educando consegue despertar um sentimento de colaboração no processo de ensino e aprendizagem.

Ainda nessa abordagem, Moura (2001) esclarece que o objetivo do jogo em sala de aula é facilitar o ensino do conteúdo, mas precisamos tomar muito cuidado na escolha dessa ferramenta de ensino, pois em vez de favorecer a aprendizagem do indivíduo pode acabar atrapalhando se acaso não for bem conduzido, planejado e executado.

Os jogos na Educação Matemática requerem certos requisitos, visto que os jogos matemáticos obedecem a certos níveis de conhecimento dos educandos, o material a ser distribuído para o aluno deve ter uma sequência lógica que lhe permita a compreensão dos conceitos matemáticos (*MOURA*, 2001).

Segundo os PCNs os jogos e outros recursos matemáticos aparecem como possibilidades interessantes para a prática do professor na sala de aula, pois:

> É consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática. Dentre elas, destacam-se a História da Matemática, as tecnologias da comunicação e os jogos como recursos que podem fornecer os contextos dos problemas, como também os instrumentos para a construção das estratégias de resolução (BRASIL, 1998, p.42).

Os jogos são recomendados como recurso para a prática de sala de aula pois os mesmos podem ser utilizados para auxiliar a compreensão do conteúdo, e preparar o aluno para a aplicação dos conteúdos já trabalhados e os PCNs para o Ensino Médio mostram o quanto as aulas expositivas com o método tradicional por si só não atende mais a necessidade dos nossos alunos nos dias atuais. Na sequência apresentamos outra estratégia de ensino como a resolução de problemas.

### *2.1.3 A resolução de problemas como estratégia para ensinar probabilidade*

Vivemos em uma sociedade que está em constante transformação e para o sociólogo canadense Guy Rocher (1924) a mudança social deve ser analisada sob um contexto histórico. A mudança social não é provisória, é constante e afeta o desenvolvimento da sociedade. Diante disso a educação acompanha a transformação da sociedade.

Para entender a educação matemática precisamos conhecer a evolução histórica. Segundo Fiorentini (1995) o processo de ensino da matemática ao longo dos anos passou

por transformações categóricas. Identificando seis tendências pedagógicas: a formalista clássica a empírica-ativista, a formalista moderna, a tecnicista e suas variações, a construtivista e a sócietnoculturalista.

A tendência formalista foi centrada no professor e a aprendizagem dos alunos era por meio da memorização. Na tendência empírico-ativista o professor passa de elemento fundamental para um orientador da aprendizagem o aluno aprende através da ação e manipulação.

A tendência tecnicista tinha a finalidade de inserir o indivíduo na sociedade tornado uma peça útil a mercado de trabalho. A tendência construtivista o conhecimento matemático se dá pela ação do indivíduo com o ambiente através da própria construção, destacando "o aprender a aprender". Por fim a tendência sócioculturalista parte de problemas da realidade onde os indivíduos estão inseridos de acordo com os grupos culturais.

Com essas novas propostas no campo da educação gral, surgiu várias tendências voltadas para o ensino de matemática ensino de matemática sendo elas, Etnomatemática, Modelagem Matemática, Resolução de Problemas, História no Ensino da Matemática, Leitura e Escrita na Matemática, Educação Matemática Crítica e uso de TICs (tecnologias da informação e comunicação), FIORENTINI (2006).

A proposta da resolução de problema é fazer o educando a interpretarem as situações propostas a eles de maneira que os educandos consigam chegar aos resultados esperados.

> [...] o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada. (BRASIL, 1997, p.32)

A utilização da resolução de problemas em sala de aula proporciona ao educando o seu desenvolvimento no processo de aprendizagem, despertando seu raciocino logico diante das situações apresentadas a eles.

De acordo com George Polya (1995) a resolução de problema considera que um indivíduo está diante de um problema quando este se depara com uma questão a que não pode dar a resposta, ou quando não sabe resolver usando seus conhecimentos logo é diferente de apenas aplicar as técnicas e fórmulas matemáticas.

## 3 I SOBRE A PESQUISA

A pesquisa iniciou da necessidade do homem em resolver ou compreender problemas que circulava ao seu redor, onde o conhecimento científico não pode estar relacionado a um pensamento ou conclusões individuais sem uma investigação mais aprofundada, com técnicas eficientes e seguras. (GIL, 2010).

Esse artigo trata-se de uma pesquisa de campo com aplicação na escola Ana

de Siqueira Gonçalves no município de Parambu-CE, localizada na zona rural em uma comunidade denominada Monte Sion, onde foram realizadas as oficinas com o uso de materiais didáticos manipuláveis.

A pesquisa foi realizada com os alunos do Ensino Médio, especificamente, do 2° ano, na faixa etária de 15 a 17 anos, alunos da rede pública de ensino da cidade de Parambu-CE.. Para a seleção dos participantes usamos os seguintes critérios: educandos que estavam no 2° ano do Ensino Médio e tivessem disponibilidade para a pesquisa.

Em seguida com os alunos já selecionados iniciamos a pesquisa, o primeiro passo foi o Pré-teste com a aplicação de um questionário, estruturados com perguntas claras e objetivas para garantir a uniformidade de entendimento das perguntas e a padronização dos resultados de caráter objetivo. O questionário teve dez perguntas envolvendo o tema e o problema abordado.

O próximo passo foi organizar os alunos em quatro grupos para a realização das oficinas, esses grupos se mantiveram até o final das oficinas, onde os alunos estudaram e realizaram as dinâmicas das oficinas.

De posse dos dados do pré-teste, planejamos as oficinas, constituindo-se assim, o plano de ação para a intervenção com as estratégias de ensino escolhidas anteriormente, envolvendo: uso de material manipulável, jogos e resoluções de problemas.

A etapa seguinte da pesquisa foi realizar as oficinas utilizando as estratégias planejadas, os jogos, materiais manipuláveis e resolução de problema, fazendo uma abordagem com o conteúdo de probabilidade. Cada oficina teve a duração de 100 minutos, sendo realizada quatro oficinas, mais uma aula expositiva ministrada pelo pesquisador.

Por último aplicamos o pós-teste com um novo questionário com o mesmo número de questões do primeiro, mantendo o mesmo grau de dificuldade.

Os dados coletados foram analisados quantitativamente e aplicamos técnicas de estatística. Na sequência foram apresentados os resultados na forma de gráficos com as respectivas intepretações.

## 4 | ETAPA 1 : APLICAÇÃO DO PRÉ-TESTE

O primeiro questionário foi elaborado com 10 questões quanti qualitativas. As questões objetivas tinham cinco alternativas com apenas uma resposta correta e as questões subjetivas o aluno escreviam seu raciocínio para resolver a situação proposta envolvendo o conteúdo de probabilidade. Participaram do pré-teste 20 educandos do 2° ano do ensino médio. O resultado do pré-teste aplicado a 20 alunos do 2° ano do Ensino Médio na Escola Ana de Siqueira Goncalves localizada na zona rural do município de Parambu-CE sinalizam que a explanação do conteúdo de probabilidade de maneira tradicional, utilizando quadro, pincel e o livro, não parece suficiente para a aprendizagem, aquisição desse conhecimento por todos os educandos. .Nessa perspectiva, apresentamos os dados

coletados no qustionário aplicado.

**Gráfico 1** Gráfico de desempenho do pré-teste

Fonte: Próprio autor (2023).

O gráfico 1 mostra que o número de erros foi maior que o número de acertos nas 10 questões abordadas, podemos analisar que o desempenho foi baixo chegando a uma média de 44% de acertos da turma.

Podemos visualizar a necessidade de mudanças de estratégias de ensino para alcançar os objetivos previstos e para isso foram desenvolvidas oficinas pedagógicas com vistas a melhorar a aprendizagem no conteúdo probabilidade confiantes de que o uso de outras estratégias de ensino auxilia os alunos na aprendizagem e aumenta a motivação dos educandos despertando seu raciocínio logico (TURRIONI; PEREZ, 2006).

## 4.2 Etapa 2 Desenvolvimento das oficinas pedagógicas e análise dos resultados

Oficinas pedagógicas para ensino de matemática são ferramentas que auxiliam o professor na explanação dos conteúdos, o uso do material didático manipulável aparece como uma opção significativa no ensino de matemática, essa união entre materiais didáticos e as oficinas além de despertar o interesse dos educandos coloca-os como um sujeito ativo na criação do seu conhecimento, de acordo com a realidade de cada um, uma vez que,

> O uso de materiais didático-pedagógicos nas aulas de matemática pode contribuir positivamente na qualidade do fazer pedagógico. O uso de diferentes recursos pode provocar uma releitura dos conceitos já estabelecidos e/ou construir novos conceitos, além de melhorar a relação entre o processo de ensino e aprendizagem, dentre outras vantagens (CARDOSO, DURIGON E MACIEL, 2012, p.52).

Os jogos selecionados para as oficinas foram os dados de 6 faces, urnas com bolas

coloridas e numeradas e um jogo de probabilidade.

O primeiro jogo selecionado foi o jogo de dados de 6 faces. Os dados são pequenos poliedros gravados com determinadas instruções. O dado mais clássico é o cubo (seis faces), gravado com números de um a seis., com essa ferramenta elaboramos algumas abordagens envolvendo o conteúdo de probabilidade.

**Figura 1** Dados de 6 faces

Fonte: Internet (2022).

O segundo jogo selecionado as urnas onde tivemos 4 unidades, dividida em dois grupos, no primeiro grupo 2 urnas onde cada uma delas tem no seu interior 8 bolas sendo duas bolas de cada cor, as cores são azul, amarela, verde e vermelha, já no segundo grupo tivemos as outras duas urnas cada uma delas com 6 bolas brancas numeradas de 1 a 6.

**Figura 2** Urna para sorteio em formato de cubo

Fonte: Próprio autor (2022).

Mais um material utilizado durante as oficinas foram as bolas numeradas e coloridas, servindo de material manipulável durante os jogos no decorrer das oficinas.

**Figura 3** Bolas numeradas e coloridas

Fonte: Próprio autor (2022).

O terceiro jogo selecionado foi o jogo das probabilidades, onde cada integrante do grupo recebe números de plástico numerados de 1 a 6.

**Figura 4** Material numerado de 1 a 6

Fonte: Próprio autor (2022).

Após o conteúdo de probabilidade ser ministrado na turma selecionada deu-se início às oficinas. Foram realizadas 4 oficinas e a culminaria das oficinas, cada encontro teve a duração de 100 minutos, sendo trabalhado uma abordagem e dinâmica diferente em torno do conteúdo de probabilidade.

No final das oficinas foi ministrada uma palestra sobre a importância da matemática no cotidiano deles, com ênfase no conteúdo de probabilidade, palestra essa ministrada pelo professor pesquisador.

Durante o desenvolvimento das oficinas os alunos apresentarm disposição para a aprendizagem, participaram atividades, demonstraram curiosidades e ao manipularem determinados objetos, analisaram, estabeleceram relações e compartilharam os resultados. Nesse aspecto tal intervenção sendo planejada, observando os resultados, to,mando providências para esclarecer as dúvidas, avançar no conhecimento, constituíram a pesquisa-ação, considerando-se que a pesquisa-ação, que é um processo onde o educador produz

informações e conhecimentos, estando inserido nesse processo. Esse modelo de pesquisa é uma forma de investigar um determinado grupo social, sobre suas próprias temáticas, sendo o pesquisador ativo e passivo dentro dessa investigação (THIOLLENT, 2008). Assim, na pesquisa-ação o pesquisador precisa estar ciente que durante esse processo ele precisa compreender a realidade onde está inserido, e a partir dessas observações começar a formular o seu ponto de vista sobre os aspectos onde está inserido.

## 4.3 Etapa 3aplicação do PÓS-TESTE

Após o término das oficinas foi aplicado um questionário com 10 questões objetivas e subjetivas, sendo elaborado com o mesmo grau de dificuldade do pré-teste, com os 20 alunos da turma do 2º ano do Ensino Médio da Escola Ana de Siqueira Gonçalves.

**Gráfico 2** Gráfico de desempenho do pós-teste

Fonte: Próprio autor (2023)

O pós-teste foi aplicado para 20 alunos do 2º ano do Ensino Médio na Escola Ana de Siqueira Gonçalves na zona rural do município de Parambu-CE. Analisando o gráfico geral do pós-teste, conseguimos perceber que em todas as questões os alunos tiveram um número de acertos maior que o número de erros, dessa maneira o índice de desempenho dos educandos teve um aumento em relação ao pré-teste.

O segundo questionário foi aplicado ao término das oficinas pedagógicas, nas quais foram trabalhados o uso de materiais manipuláveis na construção das resoluções, auxiliando os educandos na obtenção dos seus resultados.

No primeiro questionário o índice de acerto da turma ficou na faixa de 25%, logo em seguida iniciamos as oficinas pedagógicas utilizando materiais didáticos manipuláveis como uma ferramenta de aprendizagem, onde os educandos usavam o material para auxiliar na construção das resoluções, tornando o processo de ensino e aprendizagem

uma abordagem mais prática.

No final dessa ação foi aplicado mais um questionário para os educandos, onde o índice de acerto da turma passou para 78%, comparando as porcentagens no número de acerto vimos que o aumento foi bem significativo tendo um índice de aproveitamento bem alto em relação ao primeiro questionário, saindo de 25% e chegando ao índice de 78%.

Nessa perspectiva, desenvolvemos uma pesquisa-ação do tipo colaborativa, considerando-se que: Segundo Stringer (1996) a pesquisa ação colaborativa compreende uma rotina composta por três ações principais: observar, para reunir informações e construir um cenário; pensar, para explorar, analisar e interpretar os fatos; e agir, implementando e avaliado as ações.

## 5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve a problematização voltada para a seguinte questão: O ensino de probabilidade com o uso de materiais manipuláveis pode trazer melhores resultados de aprendizagem para os alunos do 2° ano do Ensino Médio? tendo como objetivo geral: analisar o uso de materiais manipuláveis para a aprendizagem de probabilidade com os estudantes do 2° ano do Ensino Médio.

Para o desenvolvimento da dissertação utilizamos da pesquisa-ação do tipo colaborativa que tem como objetivo transformar os espaços escolares e comunidades, aparece como uma importante estratégia de transformação dos pesquisados, estreitando a relação de pesquisador e pesquisado.

Com a pesquisa-ação buscamos transformar o cenário dos educandos do 2° ano do Ensino Médio da Escola Ana de Siqueira Gonçalves, com auxílio de estratégias de ensino como: jogos, materiais manipuláveis e resolução de problemas e conseguimos sair de um percentual de 25% de acertos para 78% um crescimento de 212%.

Analisando os resultados do pré-teste e pós-teste chegamos à conclusão que as estratégias utilizadas durante todo esse processo de aprendizagem os educandos conseguiram uma evolução diante do conteúdo de probabilidade.

As oficinas foram realizadas com o auxílio dos materiais manipuláveis, e as estratégias de jogos e resoluções de problemas, dessa forma o conteúdo de probabilidade foi trabalhado de maneira mais dinâmica, onde os educandos associava as definições aos materiais que tinham em mãos, fazendo associação de espaço amostral, casos favoráveis aos recursos que estava disponível a eles.

Com associação dos materiais manipuláveis e o conteúdo de probabilidade, recorremos as estratégias de jogos e resolução de problemas para sistematizar as oficinas. Considerando que a resolução de problemas muito contribuiu para motivar o educando a interpretar as situações propostas a eles de maneira que os mesmos conseguissem chegar aos resultados esperados. Após todas as etapas da pesquisa, chegamos à conclusão que o

uso dos materiais manipuláveis contribuiu para a aprendizagem dos educandos do 2° ano do Ensino Médio.

## REFERÊNCIAS

BORIN, J. **Jogos e Resoluções de Problemas: Uma Estratégia para a aula de Matemática.** São Paulo. USP. 1996.

BRASIL. Ministério da educação. Secretaria de educação**.** Media e tecnologia no Parâmetros Curriculares Nacional: **Ensino médio ciências da natureza, matemática e suas tecnologia** 1999**.**

CARDOSO, Marleide Coan; DURIGON, Ailton; MACIEL, Álvaro. **Organização e Uso do Laboratório de Ensino do Curso de Licenciatura em Matemática do IFC Sombrio.** Anais (recurso eletrônico) Simpósio de Integração Científica e Tecnológica do Sul Catarinense, SICT – Sul – Criciúma: IFSC, 2012.

FIORENTINI, D; MIORIM, M. Â. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino de Matemática.** Boletim SBEM/SP, v. 4, n. 7, 2006.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. 31 ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2001. 184 p. Freitas Filho, Adail Boa de. **PROBABILIDADE: UMA PROPOSTA À LUZ DA BNCC REDENÇÃO-CEw.** UNILAB, 2020. Disponível em: https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/. Acesso em: 16 jul. 2022.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo:

HOLE, V. (1977). **Como ensinar Matemática no Ensino Básico e no Secundário**. Lisboa: Livros Horizonte.

HURTADO, N. H.; COSTA, J. F. S. **A probabilidade no ensino médio: a importância dos jogos como ferramenta didática.** In: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL “EXPERIÊNCIAS E EXPECTATIVAS DO ENSINO DE ESTATÍSTICA – DESAFIOS PARA O SÉCULO XXI”, 2005, Florianópolis.

LOPES, M.J. REZENDE, C. J. **Um novo jogo para o estudo do raciocínio combinatório do cálculo de probabilidade.** Boletim de educação matemática agosto 2005.

LUVISON, C.C.; SANTOS, C. A. **Estatística e probabilidade a partir do jogo travessia do rio.**: In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11, 2013, Curitiba. Anais...Curitiba,2013.

MOURA, M. O. **A séria busca no jogo**: do lúdico na matemática. Educação Matemática em Revista – SBEM, São Paulo, n. 3, p. 17-24, 2. sem. 2001.

PILETTI, Nelson. **História da Educação no Brasil**. 7ª ed. 6ª reimpressão. São Paulo: Ática, 2008.

POLYA, George. (1995). **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.** Trad. Heitor Lisboa de Araújo. 2ª reimpressão. Rio de Janeiro.

TOLEDO, Marília. TOLEDO, Mauro. **Didática da matemática: com a construção da matemática.** São Paulo: FTD, 1997.

# O USO DO GEOGEBRA NO CELULAR COMO MEIO FACILITADOR PARA O ENSINO DE FUNÇÃO MODULAR EM TURMAS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

*Data de aceite: 02/10/2023*

**Edinalva Feitosa Passos**
Colégio Motivo
Petrolina – Pernambuco
http://lattes.cnpq.br/5741626744476915

**Lucília Batista Dantas Pereira**
UPEUniversidade de Pernambuco
Petrolina – Pernambuco
http://lattes.cnpq.br/7751208084431086

**RESUMO:** Este trabalho tem como objetivo analisar as possíveis contribuições da utilização do software GeoGebra no celular para o ensino e a aprendizagem da Função Modular em turmas do 1º ano do Ensino Médio. A pesquisa teve uma abordagem qualitativa baseada na observação da participação dos alunos nas atividades em sala e na atividade avaliativa online. Assim, foi averiguado o conhecimento prévio deles em relação ao conceito de módulo e de valor absoluto. Em seguida, foram realizadas algumas construções gráficas manualmente. Logo após, os alunos utilizaram nos seus dispositivos o GeoGebra para esboçar gráficos de algumas funções. Depois eles usaram o jogo online, Kahoot. Dessa forma, foi possível verificar que o uso do GeoGebra nos dispositivos móveis como recurso pedagógico, nas aulas de Matemática, contribuiu para o ensino e a aprendizagem do conteúdo trabalhado por meio da visualização gráfica das funções, tendo em vista que houve mais interesse e participação dos alunos. Constatou – se ainda que os dispositivos podem ser usados em algumas atividades para tornar as aulas mais atrativas e dinâmicas.

**PALAVRAS-CHAVE:** GeoGebra. Celular. Função Modular. Kahoot.

**ABSTRACT**: This work aims to analyze the possible contributions of using the GeoGebra software on cell phone for teaching and learning the Modular Function in 1st year high school classes. The research had a qualitative approach based on the observation of students' participation in classroom activities and online assessment activities. Thus, their prior knowledge regarding the concept of module and absolute value was verified. Then, some graphic constructions were performed manually. Soon after, the students used GeoGebra on their devices to sketch graphs of some functions. Then they used the online game, Kahoot. In this way, it was possible to verify that the use of GeoGebra on mobile devices as a

pedagogical resource, in Mathematics classes, contributed to the teaching and learning of the content worked through the graphic visualization of the functions, considering that there was more interest and participation from the students. It was also found that the devices can be used in some activities to make classes more attractive and dynamic.
**KEYWORDS:** GeoGebra. Cell phone. Modular Function. Kahoot.

## 1 I INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática, no decorrer dos anos, precisou ressignificar – se, tendo em vista que o mundo está em constante transformação e a Matemática tem grande relevância para a compreensão e atuação nele. Assim, é necessário acompanhar as mudanças e melhorar as práticas pedagógicas no processo de ensino e de aprendizagem.

Ao longo dos anos, nota-se que ter a atenção e a participação dos jovens em sala de aula é um desafio e pedir isso para um conteúdo, que não será cobrado diretamente nos editais de alguns vestibulares, é um impasse. Dessa forma, é necessário instigar a atuação deles, pois com tantas tecnologias e entretenimentos se fez necessário adaptar as aulas a formatos mais dinâmicos, tendo em vista que os estudantes atuais nasceram em um mundo digital, estão continuamente conectados e usando as tecnologias digitais.

Por isso, devese aproveitar essas tecnologias como recursos didáticos para incrementar as aulas. Existem muitos aplicativos educacionais que podem, inclusive, ser usados em dispositivos móveis, como, por exemplo, o GeoGebra (um software de geometria dinâmica que possibilita a transformação da geometria em álgebra, e vice-versa, além de possuir ferramentas muito intuitivas, que permitem construir objetos bi e tridimensionais) e o Kahoot (um aplicativo com diversos temas, por meio de jogos e perguntas em formato de *quiz*, que pode ser acessado individualmente ou em grupo).

Assim, faz-se necessário buscar novas formas de ensino que favoreçam a aprendizagem, inovar na dinâmica da relação entre o professor e o aluno, encontrar mudanças nas práticas em sala de aula, realizar aulas que não sejam unicamente expositivas e estimular os alunos a se tornarem mais ativos no processo de ensino. A esse respeito, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio destaca as tecnologias digitais e a computação como parte fundamental do mundo atual. Temas como cultura digital, mundo digital e pensamento computacional são postos como fundamentais para novas gerações, “certamente grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais” (BRASIL, 2018, p. 473).

O uso das tecnologias podem ser ferramentas poderosas nesse processo, sendo capaz de superar o desinteresse do aluno, buscar seu engajamento, motivar sua participação nas aulas, promover e melhorar o aprendizado e interesse pela disciplina. Os estudantes são convidados e instigados a participarem ativamente na construção do conhecimento. A BNCC destaca que,

> [...] os jovens estão dinamicamente inseridos na cultura digital, não somente como consumidores, mas se engajando cada vez mais como protagonistas. Portanto, na BNCC dessa etapa, o foco passa a estar no reconhecimento das potencialidades das tecnologias digitais para a realização de uma série de atividades relacionadas a todas as áreas do conhecimento, a diversas práticas sociais e ao mundo do trabalho. (BRASIL, 2018, p. 474).

Nesse cenário, este trabalho tem como questão de pesquisa: Como o uso do GeoGebra no celular pode favorecer o ensino de Função Modular em turmas do 1º ano do Ensino Médio? Tendo como objetivo geral analisar as possíveis contribuições do GeoGebra no celular para o ensino e a aprendizagem da Função Modular em turmas do 1º ano do Ensino Médio. Os objetivos específicos são: utilizar o GeoGebra no celular para a apresentação dos gráficos da Função Modular, de maneira que os alunos possam visualizar as características gráficas, como também verificar se os conceitos de Função Modular foram compreendidos pelos alunos com o auxílio do GeoGebra e do *Kahoot*.

## 2 | O USO DE TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

No cenário em que se buscavam melhorias no ensino e na aprendizagem da Matemática, surgiram as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's), que são recursos tecnológicos pedagógicos para modificar o cotidiano dos alunos e podem ser inseridos no ensino da Matemática, tendo em vista que o uso de tecnologias e softwares educativos motivam a participação dos alunos e com isso tornaram as aulas mais atrativas. A esse respeito, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN´s) de Matemática relatam que as tecnologias exercem um importante papel de transformação da sociedade por fazerem parte do cotidiano de grande parte das pessoas (BRASIL, 1998).

Assim, levando em consideração as modificações que as tecnologias exercem no cotidiano das pessoas, o uso desses recursos na escola pode transformar o espaço em um ambiente dinâmico de conexões entre o ensino e a aprendizagem, podendo contribuir no processo de ensino, motivando a participação dos alunos nas aulas e, assim, terem melhor resultado na aprendizagem.

Borba (1999, p. 294) também considera as TIC's e faz uma análise das mudanças provocadas pelo uso dos meios de informação no ensino de Matemática e seu impacto na pesquisa em Educação Matemática, considerando que

> [...] ao mesmo tempo que as técnicas se tornam cada vez mais humanizadas, na medida em que interfaces amigáveis são desenvolvidas buscando seduzir o usuário em geral, em nosso caso o estudante, vemos que as técnicas permeiam e condicionam o pensamento humano. As mídias, vistas como técnicas, permitem que "mudanças ou progresso do conhecimento" sejam vistos como mudanças paradigmáticas impregnadas de diferentes técnicas desenvolvidas ao longo da história.

Batista, Barcelos e Afonso (2005, p. 5) também enfatizam que "as TIC 's permitem

explorar outras habilidades, como visualização e simulação, além de possibilitar a formulação de conjecturas, permitindo uma melhor visualização do estudo em questão". Desse modo, o uso das tecnologias, em sala de aula, poderá facilitar a compreensão sobre determinado tema. Nesse sentido, Batista, Barcelos e Afonso (2005, p. 5) afirmam que:

> A mediação do professor, durante a realização das atividades, deve incentivar a busca por explicações para o que está sendo empiricamente constatado. Resgata-se, assim, o caráter investigativo, algo que tem sido, em geral, desconsiderado nas aulas de Matemática. [...] Mas, isto requer, muitas vezes, desprendimento para reconhecer que não sabemos tudo e que podemos aprender com nossos alunos. Tudo isso torna o processo de ensino e aprendizagem muito rico, no qual o professor exerce a posição de mediador, construindo também os seus conhecimentos.

Porém, antes de se depararem com as tecnologias nas atividades essenciais de aprendizagem, Borba e Penteado (2017) sugerem que, nas escolas, os alunos recebam uma "alfabetização tecnológica", para que, assim, possam manusear, usar e usufruir dos recursos digitais de maneira proveitosa. "Tal alfabetização deve ser vista não como um Curso de Informática, mas, sim, como um aprender a ler essa nova mídia" (BORBA, PENTEADO, 2017, p. 17).

Diante do dinamismo de informações e tecnologias em que se encontra a sociedade atual, é necessário aprimorar as práticas educativas e buscar novos sentidos para o encontro entre professores e alunos. O professor vai precisar ter uma nova postura, atualizar, constantemente, seus conhecimentos com relação às tecnologias para que, assim, possa haver um melhor aproveitamento em suas aulas, "à medida que a tecnologia informática se desenvolve, deparamo-nos com a necessidade de atualização de nossos conhecimentos sobre o conteúdo ao qual ela está sendo integrada" (BORBA, PENTEADO, 2017, p. 64).

D'Ambrósio (2007, p. 28) ressalta que, frente a todos os avanços propiciados pela teleinformática, já não há mais espaço para verdades impostas e absolutas. Nessa direção, o autor enfatiza a importância da ressignificação da educação: "Assim como a biodiversidade representa o caminho para o surgimento de novas espécies, a diversidade cultural representa o potencial criativo da humanidade".

Por isso, as práticas educativas usadas na formação escolar devem ser melhoradas constantemente e tendo em vista que a sociedade é dinâmica, a escola precisa acompanhar todas as mudanças para formar cidadãos participativos.

## 2.1 A utilização do aplicativo geogebra como recurso didático nas aulas de matemática do ensino médio

A importância da tecnologia digital está expressa na BNCC e se explicita na quinta competência geral da educação básica quando diz que é preciso "compreender, utilizar e criar tecnologias digitas de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar,

acessar e disseminar informações," para produzir e promover conhecimentos de forma individual e coletiva (BRASIL, 2018, p. 9).

Ainda segundo a BNCC para o Ensino Médio, as tecnologias digitais e a computação são recursos para o mundo atual. Temas como cultura digital, mundo digital e pensamento computacional são postos como fundamentais para novas gerações. Assim,

> [...] é preciso garantir aos jovens, aprendizagens para atuar numa sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais (BRASIL, 2018, p. 473).

Desse modo, nas melhorias das práticas educativas, pode-se incluir o uso das tecnologias como recurso didático em algumas aulas, visto que a vivência no período escolar é muito importante para a formação do aluno protagonista, ativo e participativo na sociedade.

Nessa perspectiva da aprendizagem Matemática associada ao uso da tecnologia, têm-se alguns aplicativos que contribuem para esse processo. Por exemplo, o *software* gratuito de Matemática dinâmica GeoGebra, desenvolvido por Markus Hohenwarter, é um *software* livre, de fácil instalação, disponível no site www.geogebra.org, para *download* ou pode ser usado *online*, compatível com diferentes sistemas operacionais, de fácil manipulação. Acerca de algumas características desse *software*, o Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro[1], relata que

> o GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O GeoGebra reúne recursos de geometría, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si (HOHENWARTER, 2014, p.1).

Logo, o *software* GeoGebra é um recurso que pode contribuir no estudo e na aprendizagem de funções. Com ele podem-se estabelecer animações com os parâmetros de uma função, mostrando diversas características e propriedades, que ajudam na compreensão de forma mais dinâmica e de fácil visualização que, somente com a utilização da lousa e livros, não seria facilmente compreendida pelos alunos.

Assim, os alunos têm a oportunidade de aprender o conteúdo, mesmo não tendo todo o domínio das ferramentas do *software*, mas com as manipulações podem criar possibilidades de análise das propriedades envolvidas e, por meio da visualização dos passos de construção, desenvolvem o raciocínio lógico, matemático e estratégico.

A esse respeito, a BNCC define competências e habilidades, que permitem aos

1 O Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro é integrante do IGI (INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTES) Disponível em: http://www.geogebra.im-uff.mat.br/index.html. Acesso em: 14 de junho de 2021

estudantes, dentre elas, "[...] usar diversas ferramentas de *software* e aplicativos para compreender e produzir conteúdos em diversas mídias, simular fenômenos e processos das diferentes áreas do conhecimento, e elaborar e explorar diversos registros de representação matemática". (BRASIL, 2018, p. 475).

Dessa forma, é possível proporcionar um ambiente de troca de experiências e de saberes, no qual o aluno pode ser motivado a se envolver mais na aula e o conteúdo pode ser compreendido de maneira mais ampla e mais prazerosa. Segundo Batista (2012, p. 9), "[...] recurso como o GeoGebra, além de contribuir para despertar e motivar o processo de aprendizagem, cria o hábito de participar, pensar por si próprio e construir o conhecimento, verificando também sua aplicação em outras disciplinas".

O uso desse *software* não se restringe ao computador; é possível baixá-lo em outros dispositivos como *tablets* e *smartphones*, ou ainda, usar *online*. E como o *smartphone* faz parte da rotina dos adolescentes, é um meio de socialização e de expressão, pois, a todo momento, os alunos estão em contato com as mais diversas informações e, também, com seus colegas pelas redes sociais. Eles têm uma facilidade muito grande com as tecnologias e, rapidamente, executam os comandos nos aplicativos dos seus celulares.

No momento em que eles conhecerem o *software* e suas funcionalidades, poderão utilizá-lo em qualquer lugar fora do ambiente escolar como uma ferramenta de estudo e não somente para uma atividade proposta em sala pelo professor, pois trata-se de um recurso que contribui para despertar e motivar o processo de aprendizagem e, também, criar o hábito de participar, pensar por si próprio e construir o conhecimento num processo de desenvolvimento da autonomia (NÓBRIGA, ARAÚJO, 2010).

## 2.2 O uso do celular nas aulas de matemática

O mundo atual é digital, a sociedade está rodeada de equipamentos eletrônicos com diversos recursos tecnológicos. De maneira geral, esses equipamentos servem para facilitar ou agilizar diferentes situações do cotidiano, e mesmo com essa presença tão significativa na vida das pessoas, ainda, é um desafio integrar, de forma, eficiente a prática docente com esses recursos.

Porém, é necessário pensar em maneiras de utilizar, em sala de aula, os recursos tecnológicos digitais, visando melhorar a compreensão dos conteúdos matemáticos e o aprendizado dos alunos. Uma importante ferramenta, no dinamismo das práticas educativas, é o celular, uma tecnologia digital interativa que desenvolve participação, colaboração e autonomia, que são fatores muito importantes não somente na formação do conhecimento matemático, mas também na formação profissional qualificada. Sendo assim, um "cenário fértil ao desenvolvimento de investigação e à realização de pesquisas". (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p.37).

Além disso, os alunos estão sendo preparados para viverem e trabalharem em um mundo digital em que estarão conectados o tempo todo, e não faz sentido distanciar a

Matemática e a sala de aula dessa realidade. A Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO) acredita que “as tecnologias móveis podem ampliar e enriquecer oportunidades educacionais para estudantes em diversos ambientes” (UNESCO, 2014, p. 6).

Ladeira (2015, p.217) afirma que é “fundamental conhecer e avaliar o potencial da aprendizagem móvel e identificar as novas maneiras em que a mobilidade pode contribuir para as experiências significativas de aprendizagem”.

Por outro lado, Borba e Penteado (2017) afirmam que, quando o professor decide inovar, sair do tradicional em que tem controle de tudo e passa a usar as tecnologias digitais, passa a ser um aprendiz também. Ponte (2000, p. 76) corrobora dizendo que “tal como o aluno, o professor acaba por ter de estar sempre a aprender. Desse modo, aproxima-se dos seus alunos. Deixa de ser a autoridade incontestada do saber para passar a ser, muitas vezes, aquele que menos sabe”.

Porém, a maioria das escolas não permite o uso do celular nas salas de aula, embora se sabe que, no geral, os alunos não atendem muito bem a essa proibição, e acabam usando indevidamente. Então, talvez, a solução não seja proibir, mas sim tornar o seu uso de maneira mais proveitosa, em algumas atividades, como estratégia didática. A UNESCO recomenda “evitar proibições plenas do uso de aparelhos móveis. Essas proibições são instrumentos grosseiros que, geralmente obstruem as oportunidades educacionais e inibem a inovação do ensino e da aprendizagem” (UNESCO, 2014, p.29).

Sabe –se que o uso de aplicativos educativos está ganhando força nas escolas e, com essa “disseminação dos smartphones, escolas, governos e demais instituições se voltam para potencializar essa tecnologia na melhoria do ensino e da aprendizagem” (SALDANA, 2015, p.1).

Tendo isso em vista, é possível tornar a aula mais atrativa e dinâmica, saindo do modo tradicional em que o professor é o detentor do saber, instigando o aluno a ser protagonista na construção do conhecimento, para que haja o desenvolvimento e a evolução contínua da prática pedagógica e da qualidade de ensino. (KENSKI, 2007).

Assim, o uso de recursos tecnológicos, nas aulas de Matemática, pode ser um dos fatores que contribuem para diminuir as deficiências no processo de ensino e da aprendizagem dessa disciplina e, consequentemente, melhorar a qualidade da educação de modo geral, cabendo ao professor, como mediador, tomar conhecimento de como utilizar esses recursos e se apropriar deles para socializar em sala de aula.

## 3 | METODOLOGIA

### 3.1 Caracterização da pesquisa e sujeitos da pesquisa

A pesquisa aconteceu nos meses de outubro e novembro de 2021 em uma escola

particular no Município de Petrolina -PE, com três turmas do 1º ano do Ensino Médio e contou com a participação de 27 estudantes de 46 da turma A, 32 de 44 estudantes da turma B e 22 de 46 da turma C. As turmas eram mais numerosas, porém, devido à pandemia da COVID-19, era facultativo ir para a escola. Assim, havia estudantes assistindo às aulas remotamente. Desse modo, como critério de inclusão para a coleta de dados, foram considerados somente os alunos que participaram de todas as atividades. E, por questões éticas, a identificação dos estudantes foi preservada, sendo cada estudante identificado pela letra A (quando estiver se referindo a um estudante da turma A), B (quando se referir à turma B) ou C (quando se referir à turma C) acompanhado por um número (definido por meio de ordem alfabética) de 1 a 27 (relativo à turma A) ou 1 a 32 (relativo à turma B) ou 1 a 22 (relativo à turma C). Por exemplo, à medida que a descrição A3 corresponde ao estudante 3 da turma A, C12 está se referindo ao estudante 12 da turma C.

### 3.2 Coleta de dados

Para a realização da pesquisa, foram utilizados o *software* GeoGebra e o jogo Kahoot, como estratégia pedagógica e o celular, como recurso didático, para o ensino de Função Modular. Para isso, alguns alunos baixaram o aplicativo, outros usaram de forma *online*. Neste caso, foi preciso ter internet disponível. Vale destacar, ainda, que o presente estudo foi desenvolvido em seis momentos distintos, ou seja, foram seis encontros de 50 minutos, dentro do horário regular de aula, e fazendo uso de quatro atividades, conforme descrito a seguir.

### 3.3 Análise dos resultados

Em relação à seleção de métodos e técnicas, Marconi e Lakatos (2003, p. 164) sugerem que “nunca se utilize apenas um método ou uma técnica, mas todos os que forem necessários ou apropriados” para a realização da pesquisa. Desse modo, foi feita uma abordagem qualitativa e como instrumento de coleta de dados foram aplicadas quatro atividades estruturadas, que serão descritas mais adiante.

Após as explanações sobre os conceitos básicos de Função Modular e feitas as construções gráficas, manualmente, foram apresentadas as características e as potencialidades do *software* GeoGebra, visando a um bom desempenho dos estudantes durante o estudo da função modular, ressaltando que o aplicativo é de fácil manipulação, o que tornou possível realizar, mais rapidamente, uma quantidade e variedade maior de atividades em relação às feitas no quadro.

Nesse momento, os alunos utilizaram, nos seus dispositivos, o GeoGebra para fazer os gráficos que haviam feito manualmente (atividade 1, ver anexo A). Esse recurso foi usado para despertar o interesse em aprender funções, por meio da memória gráfica e a inteligência visual e, assim, auxiliando os alunos a se apropriarem dos conceitos estudados.

Após concluir o processo de visualização e compreensão de Função Modular,

chegou-se ao quinto momento, no qual se utilizou o jogo[2] online, *Kahoot*, que foi a segunda atividade (atividade 2, ver anexo B). Esse jogo projeta uma pergunta de múltipla escolha de cada vez na lousa, sendo que as perguntas são colocadas no jogo pelo professor, ou podem ser utilizadas perguntas já salvas no site.

# 4 I ANÁLISE DOS RESULTADOS

## 4.1 Análise dos resultados da atividade 1

Os alunos utilizaram o aplicativo GeoGebra, Atividade 1 (ver Anexo A), nos seus dispositivos móveis, para construir os gráficos de função modular, dentre eles, os que haviam feito na Atividade 1. O resultado está na Figura 1.

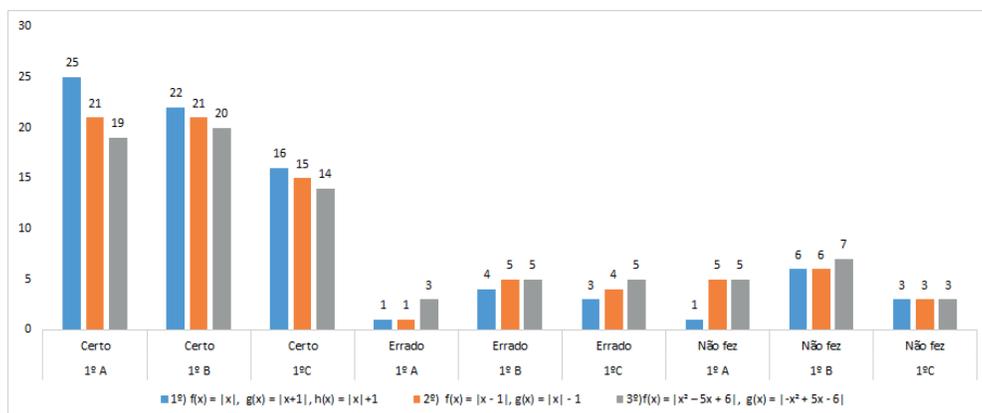



Figura 1Aproveitamento das turmas na atividade com GeoGebra.

**Fonte:** Elaboração própria

Como pode ser observado na Figura 1, as turmas apresentaram bom desempenho na atividade, sendo importante destacar que os estudantes se envolveram com essa atividade. Como afirma Batista (2012, p.9), utilizar o GeoGebra, como recurso didático, induz e estimula o processo de aprendizagem.

Quando foi mostrado como utilizar o aplicativo para construir os gráficos, colocar o controle deslizante e um ponto no gráfico, os alunos observaram, de forma dinâmica, as características dos gráficos das funções modulares em relação aos eixos cartesianos.

A construção de gráficos, utilizando o celular, auxiliou os alunos a se apropriarem dos conceitos estudados, devido à facilidade de manuseio do aplicativo, os alunos puderam comparar os gráficos com os que haviam construído na Atividade 1. Isso favoreceu

2 Os alunos terão um tempo determinado para clicar na resposta certa em seus dispositivos. Eles ganham pontos para cada resposta correta, além de pontos extras para quem clica mais rápido. Um som grave e intenso ecoa quando o tempo acaba e a tela mostra imediatamente o número de respostas certas e erradas dos alunos. Em seguida surge um ranking, listando os cinco melhores alunos e os pontos obtidos (http://www.gazetadopovo.com.br/educacao/aplicativo--transforma-ensino-em-sala-de-aula-em-game-de-conhecimento-5o6byv02zkjpjq6vp7q1khnh3).

a visualização da parte algébrica e a representação gráfica, o que contribuiu para a aprendizagem e compreensão da Função Modular. A esse respeito, a BNCC (BRASIL, 2018, p. 473) orienta que as tecnologias digitais estejam presentes nas práticas escolares, visto que o mundo digital e o pensamento computacional fazem parte do cotidiano.

## 4.2 Análise dos resultados da atividade 2

Após a conclusão da atividade com o GeoGebra, foi feita uma Atividade interativa em formato de jogo no *Kahoot* (Anexo B), sobre função modular e os alunos usaram seus dispositivos para participar da mesma. Durante a atividade proposta, verificaram-se, de modo geral, a participação, a empolgação e o desempenho das turmas. Na Figura 2, pode ser observado o resultado dessa atividade.

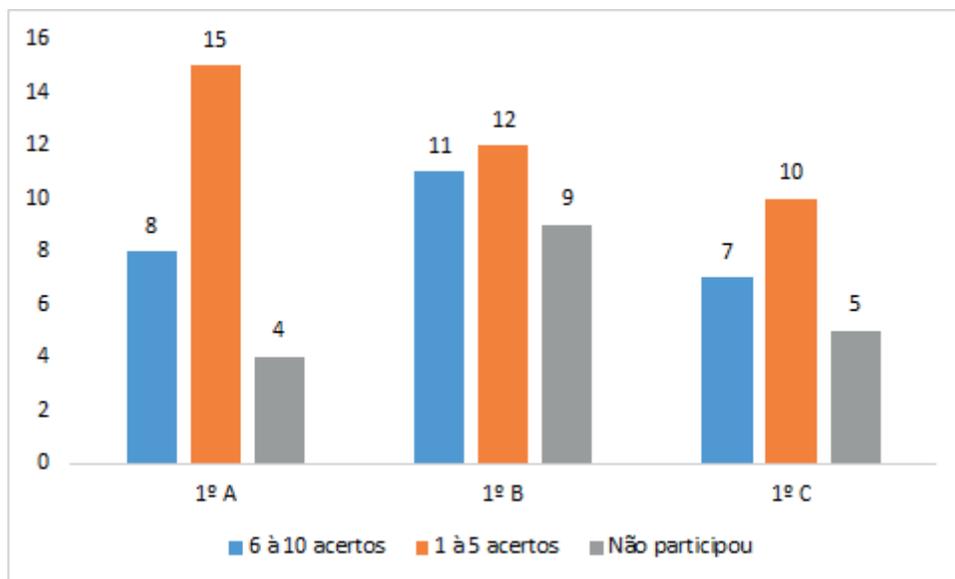



Figura 2Resultado da atividade no Kahoot.

**Fonte:** Elaboração própria

Como pode ser observado na Figura 2, as turmas apresentaram bons resultados. Por ser *online,* é necessário ter uma boa conexão com a internet e o celular de alguns alunos travou no momento do jogo. Assim, eles não conseguiram participar e avançar com os demais. Ainda assim, envolveram-se e empolgaram-se resolvendo as atividades do jogo, o que gerou grande euforia à medida em que iam acertando. Foi um momento de aprendizagem e descontração. Como afirma Bacich e Moran (2018), fazer uso dos jogos no processo de ensino e de aprendizagem contribui para a participação dos alunos na aula, pois eles são estimulados a ganharem.

Vale ressaltar que o gráfico mostrado na Figura 2 foi obtido a partir dos relatórios emitidos pelo site do *kahoot* (ver Figura 3), o qual não detalha tanto os resultados.

| Classificação | Respostas corretas | Não respondido | Pontuação final |
|---|---|---|---|
| 1 | 70% | — | 5 407 |
| 2 | 70% | — | 5 261 |
| 3 | 70% | — | 5 200 |
| 4 | 70% | — | 4 918 |
| 5 | 70% | — | 4 771 |
| 6 | 70% | — | 4 668 |
| 7 | 60% | — | 4 608 |

Figura 3Fragmento de um relatório do jogo Kahoot.

**Fonte:** Site Kahoot

## 5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando se iniciou o trabalho de pesquisa, constatou-se que o uso do celular faz parte da rotina diária da maioria das pessoas, em especial dos adolescentes. Esse dispositivo possibilita o acesso rápido a todo tipo de informação no mundo, o que o torna um importante recurso pedagógico. E sabe-se que o seu uso em sala torna a aula interativa e dinâmica. Desse modo, buscou-se um olhar diferenciado para o ensino e a aprendizagem da função modular, objetivando a visualização e a compreensão pelos alunos.

Diante disso, a pesquisa teve como objetivo geral analisar as contribuições do GeoGebra no celular para o ensino e aprendizagem da Função Modular em turmas do 1º ano do Ensino Médio. Constata-se, com os resultados contidos na seção 4, que o objetivo foi atendido, o trabalho conseguiu, efetivamente, mostrar que o uso do GeoGebra no celular consegue envolver os alunos, favorece a assimilação e compreensão dessa função e com isso gera bons resultados.

O objetivo específico inicial era utilizar o GeoGebra no celular para apresentação dos gráficos da Função Modular, de maneira que os alunos pudessem visualizar as características gráficas. E ele foi conquistado, porque os alunos conseguiram fazer, de maneira mais prática, uma quantidade maior de gráficos e, assim, visualizar as especificidades da função modular.

O segundo objetivo específico era verificar se os conceitos de função modular foram compreendidos pelos alunos com o auxílio do GeoGebra e do Kahoot. Como pode ser observado na Seção 4, o objetivo foi também alcançado, tendo em vista que os alunos apresentaram bom desempenho nas atividades.

A pesquisa partiu da hipótese de que o uso de aplicativos no celular pode favorecer o ensino de função modular, visto que o estudo dessa função se faz necessário pela sua aplicabilidade em outras áreas do conhecimento e o uso desse dispositivo como recurso

didático torna a aula dinâmica e interativa.

Durante o trabalho, verificouse que, nas atividades com uso do GeoGebra e do *Kahoot*, os alunos demonstraram mais interesse para participar da aula; logo, a hipótese foi confirmada.

Diante da metodologia aplicada, percebe-se que a maior parte do trabalho foi pautada no uso de tecnologias digitais e, para isso, é preciso que os alunos estejam com seus dispositivos, que a internet seja de boa qualidade e não apresente problemas, como por exemplo, queda de sinal na rede.

Outra limitação, foi a pandemia causada pela COVID 19. No período da aplicação das atividades, ainda, era facultativo ir para a escola, alguns alunos iniciavam e não concluíam as atividades por perda de sinal de internet ou por se ausentarem da aula, poderia ter sido feita uma coleta maior de dados e acompanhado os resultados da turma toda.

E, por fim, sugerese o uso do aplicativo GeoGebra nas outras funções que são trabalhadas no 1º ano do Ensino Médio, que são a função afim, função quadrática, função exponencial e função logarítmica. Com seu uso GeoGebra podem ser amenizadas as dificuldades de visualização dos gráficos da função quadrática com relação ao ponto máximo e ponto mínimo. Também é possível verificar as diferenças e as semelhanças dos gráficos das funções exponenciais e funções logarítmicas.

## REFERÊNCIAS


BACICH, L.; MORAN, J. **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática.** Porto Alegre: Penso, 2018.

BATISTA, L.S. **O Geogebra como Ferramenta de auxílio pedagógico no Estudo das Funções Quadráticas. 2012**. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2012/2012_fafipa_mat_artigo_leonilde_da_silva_batista.pdf. Acesso em: 22 de julho de 2021.

BATISTA, S. C. F. ;BARCELOS, G. T.; AFONSO, F. F. **Tecnologias de Informação e Comunicação no Estudo de Temas Matemáticos**. In: XVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2005, São Paulo. Anais do XVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2005.

BORBA, M. C. **Tecnologias informáticas na Educação Matemática e reorganização do pensamento**. In: BICUDO, M. A. V. (org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. P. **Informática e Educação Matemática**. 5 ed.; 3. Reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2017.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento.** 1.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 15. ed. São Paulo: Papirus, 2007.

HOHENWARTER, M. GeoGebra.org, 2014. disponível em http://www.geogebra.org/. Acesso em: 14 de junho de 2021.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação.** Papirus, Campina, 2007.

LADEIRA, V. P. **O Ensino de Funções em um Ambiente Tecnológico: uma investigação qualitativa baseada na teoria fundamentada sobre a utilização de dispositivos móveis em sala de aula como instrumentos.** 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Outro Preto, 2015.

NÓBRIGA, J. C. C. ARAÚJO, L. C. L. de. **Aprendendo matemática com o Geogebra**. São Paulo: Editora Exato, 2010.

SALDANA, P. **Uso de aplicativos para celular ganha força na escola**. 2015. Disponível em: http://educacao.estadao.com.br/noticias/geral,uso-de-aplicativospara-celular-ganhaforca-na-escola,1749345. Acesso em: 18 de abril de 2018.

UNESCO. **Diretrizes de Políticas para a aprendizagem móvel**. (2014). Disponível em: http://www.bibl.ita.br/UNESCO-Diretrizes.pdf. Acesso em: 15 de junho de 2021.

## ANEXO B

Atividade 2: Construções gráficas utilizando o GeoGebra, aplicada nas três turmas do 1º ano do Ensino Médio.

**Questão 01**

Construa no mesmo, plano cartesiano, as seguintes funções, identificando-as com cores diferentes.

a) $f(x)=|x|$ b) $g(x)=|x+1|$ c) $h(x)=|x|+1$

**Questão 02**

Construa, no mesmo plano cartesiano, as seguintes funções, identificando-as com cores diferentes.

a) $f(x)=|x-1|$ b) $g(x)=|x|-1$

**Questão 03**

Construa, no mesmo plano cartesiano, as seguintes funções, identificando-as com cores diferentes.

a) f(x)=lx²-5x+6l

b) g(x)=l-x²+5x-6l

## ANEXO B

Atividade 2: Jogo online no Kahoot, aplicada nas três turmas do 1° ano do Ensino Médio.

1) Calcule: $|2-\sqrt{5}| + |3-\sqrt{5}|$

a) $5-2\sqrt{5}$ b) 5 c) 1 d) $5+2\sqrt{5}$

opção a opção b opção c opção d

2) Sabendo que $2 < x < 3$, então o valor de l x 2 l l x 3 l é

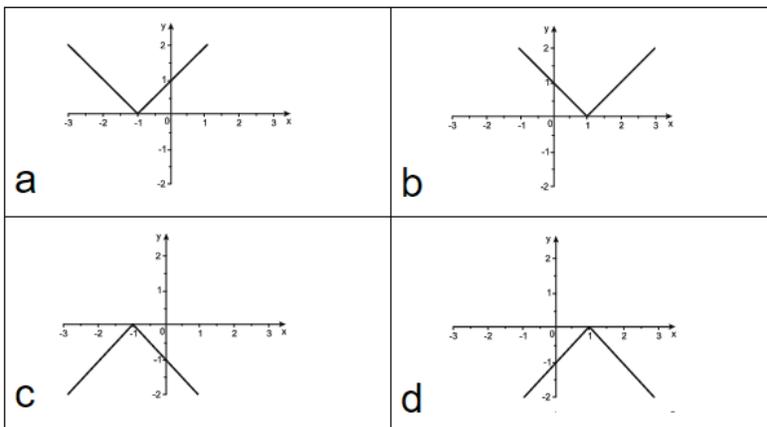
2x - 5 1 -5 2x + 1

3) Calcule o valor de l 2 l√3 4l:

2 2 + √3 √3 2 - √3

4) Qual o gráfico que melhor representa a função?

$$f(x) = |-x+1|$$

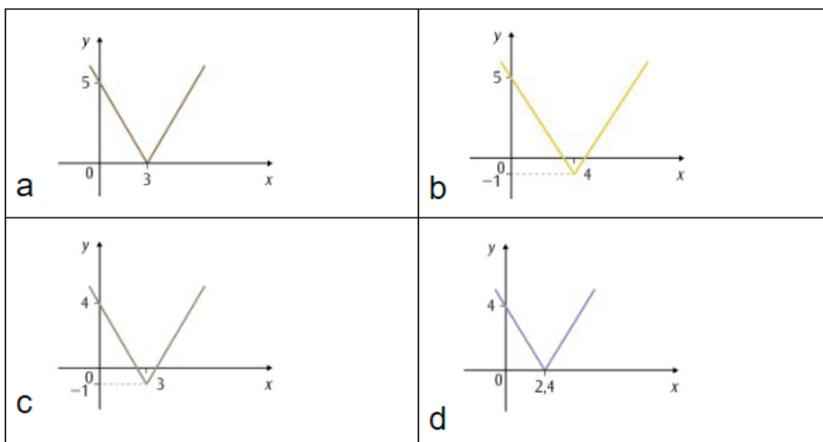
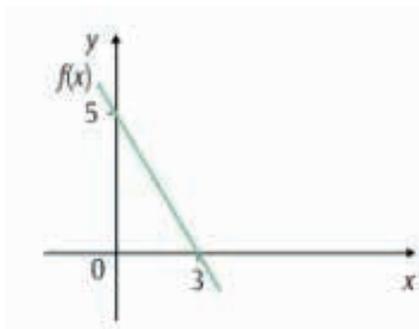
a b c d

opção a opção b opção c opção d

5) (PUC-SP) No gráfico a seguir, está representada a função do 1º grau f(x). O gráfico que melhor representa g(x)=lf(x)l-1 é:

a

b

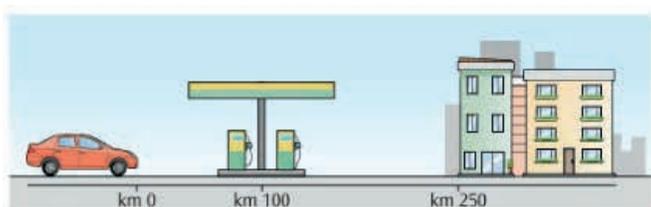
c

d

opção a

opção b

opção c

opção d

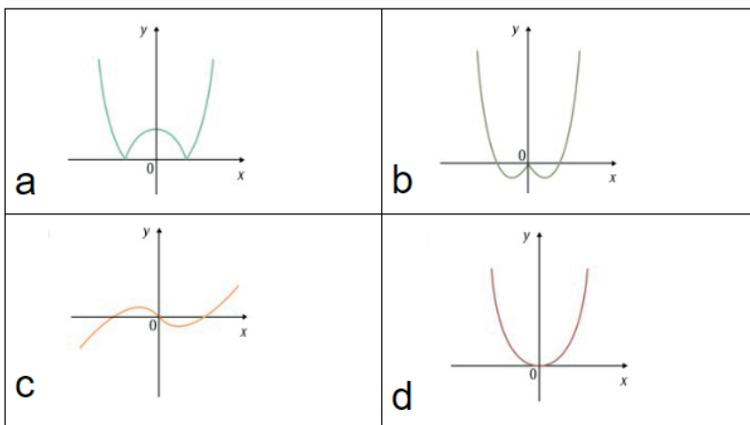
6) Resolver: (UFRN) Um posto de gasolina encontra-se localizado no km 100 de uma estrada retilínea. Um automóvel parte do km 0, no sentido indicado na figura a seguir, dirigindo-se a uma cidade a 250 km do ponto de partida. Num dado instante, x denota a distância (em quilômetros) do automóvel ao km 0. Nesse instante, a distância (em quilômetros) do veículo ao posto de gasolina é:

| x |

| x -100 |

| 250 - x |

| 350 - x |

7) Qual o gráfico que melhor representa a função?

$$f(x) = x^2 - |x|$$

8) O conjunto de soluções da equação | x 1 | + | x 2 | = 3 é :

- {0,1}
- {1,3}
- {0,3}
- {3}

9) O número de soluções negativas da equação l 5x 6 l = x² é:

- 3
- 1
- 2
- 0

10) As raízes reais da equação l xl² + l x l 6 = 0 são tais que:

- a soma delas é -1
- ambas são positivas
- o produto delas é -6
- o produto delas é -4

**FABRÍCIO MORAES DE ALMEIDA** Possui graduação em Matemática pela UFMT (2000), Físico Lei n. 13.691, de 10 de julho de 2018, Especialização em Física Básica UFMT (2001), Esp. em Redes de Computadores UNIRONDON (2009), mestrado em Física pela Universidade Federal do Ceará (2002) e Doutorado em Física pela UFC (2005) e com Pós-doutorado UFMT/CNPq (2009). E também com formação em Engenharia de Computação/Produção. Têm pesquisas cientificas com temas de Engenharia Elétrica, Computação/Produção; Inovação, Modelagem, Gestão e Desenvolvimento Regional; Modelagem Matemática/Computacional e pesquisas interdisciplinares/muldisciplinares. É líder do grupo de pesquisa GEITEC/UFRO. Já orientou dezenas de teses e dissertações. Ademais, centenas de publicações cientificas em diversas revistas internacionais e nacionais. Além disso, faz parte de conselho editorial de várias revistas cientificas nacionais e internacionais. Adicionalmente, têm especializações pela FUNIP(2020/2023), em: Engenharia Elétrica, Engenharia de Produção, Engenharia de Controle e Automação Industrial; Engenharia de Software e Análise e Desenvolvimento de Sistemas. Tem experiência com: consultoria de pesquisa, tecnologia, engenharia, inovação e negócios; mais de 20 anos de experiência com administração e gerência de empresas públicas e privadas, com vasto conhecimento em engenharia de processos/projetos e possuí mais de 22 anos de estudos e pesquisas com matemática/computação, data science et al. Atualmente, é professor associado 3 da Universidade Federal de Rondônia e docente do Programa de Pós-graduação: Doutorado/Mestrado em Desenvolvimento Regional e Meio Ambiente da Fundação Universidade Federal de Rondônia. Além disso, é Bolsista de Desenvolvimento Tecnológico Industrial do CNPq DTI Nível A. (para saber mais, acesse: http://lattes.cnpq.br/5959143194142131).

ÍNDICE REMISSIVO

**S**



**T**



**U**

# CONSTRUÇÃO **E DIFUSÃO** DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO 2


www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br


Ano 2023

# CONSTRUÇÃO **E DIFUSÃO** DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO 2


www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br


Ano 2023